

І. О. Загоруйко, Л. О. Петкова

МЕТОД DEA ЯК ІНСТРУМЕНТ ПОРІВНЯЛЬНОГО АНАЛІЗУ ЕФЕКТИВНОСТІ НАЦІОНАЛЬНИХ ЕКОНОМІК

Статтю присвячено теорії порівняльного аналізу ефективності національних економік за допомогою непараметричного методу аналізу оболонки даних (DEA). В ході дослідження ставилися цілі: визначити алгебраїчні форми задач лінійного програмування, які б адекватно відображали рубежі технічної та економічної ефективності; окреслити основні точки зору стосовно побудови світового технологічного рубежу та обґрунтувати доцільність доповнення його світовим економічним рубежем. Пропонована модель містить чотири рубежі ефективності – технологічний та економічний рубежі, побудовані за методом оболонки фактичних станів, та аналогічні рубежі, що являють собою оболонки функцій розподілу продукту і його ціни. Відповідно до змісту пропонованої моделі основним методом дослідження рубежів ефективності та інтерпретації отриманих результатів обрано геометричний метод. Завдяки цьому була показана можливість відображати рубіж за методом оболонки функцій розподілу (відрізків прямих) в одній системі координат як оболонку фактичних станів (точок) в альтернативній системі.

Ключові слова: *аналіз оболонки даних, світовий технологічний рубіж, непараметричний підхід, ефективність національних економік, продуктивність праці, фондовіддача.*

Вступ. У сучасних економічних дослідженнях все більшої популярності набуває непараметричний підхід до обробки економічних даних. Реалізацією такого підходу є метод аналізу оболонки даних (Data Envelopment Analysis – DEA). Застосування методу DEA до обробки статистичних даних можна пояснити зростаючою складністю, а інколи і неможливістю побудови адекватних економетричних моделей. Початково, метод DEA використовувався на мікрорівні – для побудови меж ефективності групи порівнюваних суб'єктів. В останні роки цей метод почав використовуватися і на макрорівні – для порівняння національних економік різних країн. В найбільш поширених моделях, країни-лідери, що мають найкращі комбінації показників технічної ефективності (фондовіддачі та продуктивності праці) утворюють світовий технологічний рубіж (World Technology Frontier – WTF). Решта країн розглядається як аутсайдери відносно цього рубежу. В альтернативній моделі СТР замість оболонки комбінацій показників (точок країн) будується оболонка функцій показників (національних меж ефективності) [1, р. 20].

Логічним узагальненням теорії СТР є ідея рубежів, які будуються не тільки для технічних, але й для економічних та будь-яких інших показників. Реалізацією цієї ідеї є пропоноване дослідження.

Аналіз останніх публікацій. Серед праць, присвячених суто математичним аспектам аналізу оболонки даних, можна виділити фундаментальні роботи засновників сучасного DEA В. В. Купера, Л. М. Сейфорда та К. Тоне – «Вступ до аналізу оболонок даних та його застосування» (2006) та розширене видання «Аналіз оболонки даних» (2007) [2, 3]. Предметом дослідження в цих роботах є задачі побудови різноманітних рубежів ефективності, їх геометрична інтерпретація, коректна алгебраїчна постановка та розв'язання.

Більш прикладний характер має «Аналіз оболонки даних та його застосування до менеджменту» за редакцією В. Чарльза та М. Кумара (2012) [4]. Робота складається з шістнадцяти розділів, написаних дослідниками з різних країн світу, і містить викладення основних моделей DEA та прикладів його практичного застосування.

В одному з останніх видань математичного спрямування – книзі Р. К. Сіклза та В. Зеленюка «Вимірювання продуктивності та ефективності» (2019) – розглядаються різноманітні аспекти застосування статистичних методів в аналізі оболонки даних [5].

Разом з тим, в теоретичній літературі можна зустріти і певні застереження щодо застосування методів DEA на практиці. Так, А. Емрузнежад та Е. Кабанда (2013) роблять висновок, що «результати DEA слід тлумачити з великою обережністю, щоб уникнути подачі неправильних сигналів та надання неналежних рекомендацій» [6, с. 235].

Найбільш близькою до теми пропонованого дослідження можна вважати статтю Ф. Каселлі та В. Дж. Колемана (2006). В цій статті розглядаються відмінності між країнами у сукупній факторній

продуктивності, коли кваліфікована та некваліфікована робоча сила є недосконалими замінниками [7, с. 499]. Автори будують світовий технологічний рубіж на основі неокласичної теорії, згідно з якою фірми максимізують свій прибуток при заданій виробничій функції. Автори аналізують різні форми виробничої функції, в яких аргументами є фондоозброєність праці, а також величини кваліфікованої та некваліфікованої праці L_S , L_U . Для визначення коефіцієнтів ефективності цих видів праці A_S та A_U вводиться нелінійне обмеження. Автори шляхом регресії визначають параметри своєї моделі, а потім в логарифмічній системі координат « $\log A_U - \log A_S$ » будують світовий технологічний рубіж як оболонку відповідних національних рубежів [7, с. 510 – 515].

У моделі трьох співавторів – Ж. Ванденбусше, Ф. Агіона та К. Мегіра (2006) – світ складається з кінцевої кількості економік, що мають одиначне населення та не підтримують між собою міжнародну торгівлю [8, с. 101]. Як і модель Каселлі – Колемана, запропонована авторами модель ґрунтується на неокласичній теорії поведінки фірми. Особливістю їхньої моделі є зображення фірм як місцевих монополістів. В цій моделі щоразу на початку наступного періоду фірма обирає певну комбінацію: 1) імітаційної діяльності, спрямованої на впровадження світових прикордонних технологій та 2) інновацій на місцевому технологічному рубежі [8, с. 102].

Математичний аналіз власної моделі призвів авторів до висновку, що вплив обсягу кваліфікованого людського капіталу на економічне зростання тим сильніший, чим ближча економіка до технологічного рубежу. [8, с. 109]. На базі даних по 19 країнах ОЕСР за період 1960 – 2000 рр. автори зробили емпіричний аналіз моделі і з'ясували, чому попередні дослідження не виявили позитивного зв'язку рівнем шкільного навчання та подальшим зростанням у багатих країнах [8, с. 97].

Щоб перевірити основні гіпотези, як саме людський капітал допомагає країнам прискорювати економічне зростання, М. Р. Іслам (2010) використав ту ж емпіричну методологію, що Ж. Ванденбусше та ін. [9, с. 19]. На прикладі 87 країн різного рівня розвитку він встановив, що ефект кваліфікованого людського капіталу зростає із наближенням до технологічного рубежу для країн із високим та середнім доходом, тоді як молодші працівники із середньою освітою прискорюють економічне зростання в країнах із нижчими доходами.

Розглядаючи модель Каселлі – Колемана, Й. Й. Крюгер (2017) відзначає, що хоча головний результат їхнього дослідження є надійним в рамках непараметричного підходу, проте решта результатів є чутливими до альтернативних визначень кваліфікованої та некваліфікованої праці, джерел вихідних даних та варіантів підходу до вимірювання [10, с. 91].

Проблемі надійності непараметричного аналізу світових рубежів присвячено дослідження К. Мастромарко та Л. Сімара (2018). Як відзначають ці автори, існує думка, що параметричні моделі дозволяють набагато краще аналізувати процес виробництва з точки зору еластичності. Проте, зауважують вони, це вірно, якщо обрана параметрична модель є адекватною справжній межі. Вони солідаризуються з думкою Ж.-П. Флоренса та Л. Л. Сімара, що у більшості таких моделей з'являються дефекти, які зумовлені неоднорідністю розподілу та віддаленими точками даних [11, с. 140].

Ідею Каселлі – Колемана про неповну взаємозамінюваність кваліфікованої та некваліфікованої праці розвиває також Я. Гровець у своїй статті 2008 року [12]. Проте, на відміну від попередників, він застосовує непараметричний підхід. Автор звертає увагу на значну внутрішню неоднорідність США, зумовлену їх великими розмірами. За розрахунками автора, американські дані, дезагреговані до рівня окремих штатів, по-перше, показують, що можна виробляти більш ефективно, ніж у середньому по США. По-друге таке використання загальнодержавних американських даних разом із даними окремих штатів дозволяє, на його думку, будувати лінію СТР точніше.

У своїй наступній статті Я. Гровець доповнив дослідження аналізом напрямків зрушення сегментів СТР за період 1970 – 2000 рр. Звертає на себе увагу, що СТР, побудований ним на площині «фондоозброєність праці – сукупна факторна продуктивність», не є опуклою оболонкою [12, с. 12–16; 13, с. 789–792].

В праці В. Келлера [14] оцінювалася важливість географічного чинника поширення технологій із врахуванням міжнародної торгівлі, прямих іноземних інвестицій та каналів комунікації в період 1970 – 1995 рр.

У деяких працях предметом дослідження була обрана саме динаміка світового технологічного рубежу. Так, У. Кантнер та Х. Хануш на базі даних по 87 країнах послідовно будують річні СТР для періоду 1960 – 1990 рр. Система координат « $L/Y - K/Y$ », якою вони скористалися, дозволила

представити СТР в найбільш інформативному вигляді – одиничних ізоквант. Геометрична інтерпретація п'яти обраних СТР показала наявність багатьох точок їхнього перетину [15, с. 26].

Х. Форстнер та А. Ісакссон [16] характеризують такий перетин старих та нових СТР як «парадокс технологічного регресу». Вони вважають, що створюваний цим перетином ефект наближення країни-аутсайдера до нового СТР, є уявним. Як образно відзначають автори, створюється враження, що більш ефективні (для даної фондоозброєності) технології вже «забуті». Для розв'язання цього парадоксу вони пропонують будувати довгострокову лінію СТР з урахуванням станів країн-лідерів минулих періодів. Суть пропонованого ними методу LMDEA (Long-Memory Data-Envelopment Analysis) полягає у побудові єдиної оболонки станів усіх країн за весь період спостереження. Таким чином, довгострокова лінія СТР буде являти собою зовнішню оболонку короткострокових ліній.

Однак, метод LMDEA не набув підтримки серед інших дослідників. Зокрема, в одному з останніх досліджень 2020 року (Е. Лафуенте та ін.) знову з'являється явище взаємного перетину СТР різних років. В цьому дослідженні концепція СТР використовується для аналізу двох типів підвищення національної ефективності: 1) запозичення вже існуючих технологій або перерозподіл ресурсів у більш ефективні види діяльності (підприємництво за Кірцнером) та 2) запровадження принципово нових технологій на основі генерування нових знань (підприємництво за Шумпетером). У першому випадку країна-аутсайдер слідує за новим СТР, не перетинаючи його. При цьому, якщо вона має порівняно високу фондоозброєність, рівень її продуктивності праці може тимчасово виявитися навіть вищим, ніж у лідера. Проте у довгостроковому періоді шумпетеріанський тип підприємництва настільки суттєво зрушує СТР, що навіть в умовах більш низької фондоозброєності країна-лідер починає випереджати аутсайдера за продуктивністю праці [17].

Проблема перетину СТР різних років взагалі знімається, якщо, як це зробив Джейкоб Б. Медсен, за еталон апріорі обирати велику розвинену країну. В своєму дослідженні ролі рівня освіти (2014) він визначає світовий технологічний рубіж як максимальну сукупну факторну продуктивність США та Сполученого Королівства за умови, що малі країни (як, наприклад, Норвегія) не можуть на нього впливати [18, с. 682].

Постановка проблеми. Представлений огляд економіко-математичних та макроекономічних досліджень свідчить про певні «пробіли» в обох цих напрямках. Незважаючи на активне використання графічних інтерпретацій DEA, підхід з точки зору проективної геометрії не застосовується. Внаслідок цього, теорія макроекономічних рубежів ефективності представлена моделями, що порівнюють лише технічні показники ефективності, а ціни факторів виробництва використовують виключно як допоміжний інструмент для обчислення цих показників.

Однак, в ринковій економіці метою виробників є не тільки підвищення технічної ефективності, що виражається у зниженні фондо- та працемісткості, але й підвищення економічної (у вузькому розумінні) ефективності – зниженні реальних цін використовуваних факторів виробництва. Ці дві пари цілей – зниження інтенсивностей використання факторів виробництва та зниження реальних ставок орендної й заробітної плати – є взаємно «конкуруючими»: зниження першої пари показників підвищує два інших, і навпаки.

Таким чином, предметом пропонованого дослідження стало адекватне відображення в теорії рубежів ефективності взаємозалежності цих «конкуруючих» цілей. Проаналізовані праці показують, що явище перетину рубежів різних років є окремою проблемою, яка може виникати не тільки у суто непараметричних моделях, а й в моделях «змішаного» типу. Виходячи з цього, у пропонованому дослідженні усі рубежі ефективності будувалися суто непараметричним шляхом, і таким чином, відображали єдиний період (у стандартному вигляді – рік).

Мета та методологія дослідження. Для розв'язання проблеми неповноти суто технологічного підходу до світових рубежів ефективності була поставлена мета – доповнити класичну модель DEA таким чином, щоб на основі нової моделі побудувати рубежі технічної та економічної ефективності за обома методами – оболонки фактичних станів (точок) країн та оболонки їхніх національних функцій розподілу продукту та його ціни.

Відповідно до змісту пропонованої моделі парних рубежів ефективності (Paired Efficiency Frontier Model – PEF model) основним методом дослідження та інтерпретації отриманих результатів обрано геометричний метод. Завдяки цьому, була показана можливість відображати рубіж за методом оболонки функцій розподілу (відрізків прямих) в одній системі координат як оболонку фактичних

станів (точок) в альтернативній системі. Це, у свою чергу, суттєво спростило визначення відстаней до цих рубежів.

Баланс показників технічної та економічної ефективності. Розглянемо економіку окремої країни X , стосовно якої зробимо декілька припущень. По-перше, припустимо, що на макрорівні використовуються лише два фактори виробництва, кожен з яких оплачується за власною ставкою (rate). По-друге, припустимо, що матеріальні витрати, податки та економічний прибуток фірм-виробників дорівнюють нулю. Тоді номінальний дохід (nominal income) фірм-виробників має дорівнювати сумі номінальних доходів власників факторів виробництва:

$$PY = RK + WL \quad (1)$$

де P – ціна одиниці створеного продукту (product); Y – фізичний обсяг (physical volume) продукту, що виробляється в країні за одиницю часу; K та L – фізичні величини основного капіталу (fixed capital) та робочої сили (labor force); R та W – номінальні ставки (nominal rates) орендної (rent) та заробітної (wage) плати.

Отримане рівняння балансу номінальних доходів можна представити у двох формах.

Перша форма є функцією розподілу продукту між власниками факторів виробництва:

$$Y = \frac{R}{P}K + \frac{W}{P}L \quad \Rightarrow \quad Y = rK + wL \quad (2) \quad (3)$$

де $r = R/P$, $w = W/P$ – реальні ціни наймання капіталу та праці (real rental price of capital, real hiring price of labor).

Зауважимо, що реальні ціни факторів виробництва для їхніх власників не тотожні реальним цінам з точки зору фірм-виробників. Для фірм вони вимірюються у продукті, який вони продають, а для власників факторів – у продуктах, який вони купують:

$$r_K = \frac{R}{P_I} \quad w_L = \frac{W}{P_C} \quad (4) \quad (5)$$

де P_I , P_C – ціни на інвестиційні та споживчі товари. Реальні, з точки зору власників, ціни їхніх факторів – r_K та w_L – показують, скільки одиниць продукту вони можуть придбати за одну продану «ресурсо-годину». Реальні ціни факторів з точки зору фірми – r , w – показують, скільки одиниць продукту повинні продати фірми, щоб купити одну «ресурсо-годину». Обернені величини

$$\frac{P}{R} = \frac{1}{r} \quad \frac{P}{W} = \frac{1}{w} \quad (6) \quad (7)$$

є показниками економічної ефективності. Вони показують, скільки «капітало-годин» та «людино-годин» можуть купити фірми за рахунок продажу однієї одиниці продукції.

Друга еквівалентна форма балансу номінальних доходів є функцією розподілу ціни продукту:

$$P = \frac{K}{Y}R + \frac{L}{Y}W \quad \Rightarrow \quad P = kR + lW \quad (8) \quad (9)$$

$k = K/Y$, $l = L/Y$ – фондомісткість та працемісткість (capital intensity, labor intensity). Обернені величини є показниками технічної ефективності:

$$\frac{Y}{K} = \frac{1}{k} \quad \frac{Y}{L} = \frac{1}{l} \quad (10) \quad (11)$$

Вони показують, скільки одиниць продукту можуть виробити фірми, використовуючи одну «ресурсо-годину».

Обидві форми балансу доходів зводяться до наступного виразу:

$$rk + wl = 1, \quad (12)$$

яке будемо називати балансом показників технічної та економічної ефективності. Його можна розглядати з двох точок зору. По-перше, k та l можна вважати координатами поточного технологічного стану країни, а r та w – параметрами функції розподілу обсягу її продукту. По-друге, r та w можна вважати координатами поточного економічного стану країни, а k та l – параметрами функції розподілу ціни її продукту. Саме балансовий характер цього рівняння створює конфлікт між двома цілями – підвищенням технічної та економічної ефективності: зниження k та l призводить до підвищення r та w (подорожчання факторів виробництва для фірм-виробників), і навпаки.

Світові рубежі ефективності як розв'язок задачі лінійного програмування. Розглянемо тепер групу країн, що відрізняються як за технічною, так і за економічною ефективністю. При цьому припустимо, що в цій групі немає такої країни, яка б перевершувала усі інші за кожним з показників

технічної або економічної ефективності. Зрозуміло, що за одним окремим показником ефективності завжди можна виділити одну, або більше країн, які досягають найвищого у цій групі рівня. Такі країни логічно назвати абсолютними лідерами за даним показником. Деякі інші країни будуть мати найкращу, порівняно з іншими, комбінацію двох показників даного виду ефективності. Питання, яку саме комбінацію показників вважати найкращою, якщо виходити тільки з інформації про поточний стан цих країн, розв'язується за допомогою аналізу оболонки даних (DEA) – непараметричного методу, який дозволяє побудувати детерміністську модель порівняльної ефективності.

З алгебраїчної точки зору, метод DEA є задачею лінійного програмування. Стосовно даного дослідження, цей метод призводить до двох вхід-орієнтованих (input-oriented) задач, які разом із балансом номінальних доходів складають першу частину запропонованої моделі PEF:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \tau_j \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \geq Y_j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i K_i \leq \tau_j K_j \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i \leq \tau_j L_j \\ \lambda_i > 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \varepsilon_j \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \geq P_j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i \leq \varepsilon_j R_j \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i W_i \leq \varepsilon_j W_j \\ \lambda_i > 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$P_j Y_j = R_j K_j + W_j L_j \quad (15)$$

де j – номер даної країни, $i = 1, \dots, n$ – номери країн, з якими вона порівнюється; $\min \tau_j$, $\min \varepsilon_j$ – показники загальної (general) технічної та відповідно загальної економічної ефективності країни, значення яких не більше одиниці.

Величина $1/\min \tau_j$ показує степінь необхідних змін для досягнення рубежу технічної ефективності: у скільки разів країні X_j потрібно зменшити обсяг факторів виробництва при незмінному обсязі продукту. У системі координат « $L/Y - K/Y$ » величина $d_{ST}(X_j) = \min \tau_j$ показує відстань цієї країни до рубежу технічної ефективності S_T вздовж променя її фондоозброєності праці (capital-labor ratio) $\kappa_j = K_j/L_j$.

Аналогічно, величина $1/\min \varepsilon_j$ показує степінь необхідних змін для досягнення рубежу економічної ефективності: у скільки разів країні X_j потрібно зменшити ціни на фактори виробництва при незмінному рівні цін на продукти. У системі координат « $W/P - R/P$ » величина $d_{SE}(X_j) = \min \varepsilon_j$ показує відстань цієї країни до рубежу економічної ефективності S_E вздовж променю її відносної ціни капіталу $\rho_j = R_j/W_j$.

Рубежі S_T та S_E являють собою оболонку найкращих технологічних і, відповідно, економічних станів. Заміна задач мінімізації τ_j , ε_j на вхід-орієнтовані (input-oriented) задачі їх максимізації призводить до побудови ще двох рубежів ефективності – F_T та F_E , які є оболонками найкращих функцій розподілу – відповідно продукту та його ціни:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \varepsilon_j \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \leq P_j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i \geq \varepsilon_j R_j \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i W_i \geq \varepsilon_j W_j \\ \lambda_i > 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \tau_j \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \leq Y_j \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i K_i \geq \tau_j K_j \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i \geq \tau_j L_j \\ \lambda_i > 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

де $\max t_j$, $\max e_j$ – показники загальної технічної та відповідно загальної економічної неефективності країни, значення яких не менше одиниці.

У системі координат « $W/P - R/P$ » величина $d_{FT}(X_j) = 1/\max e_j$ показує відстань цієї країни до рубежу технічної ефективності F_T вздовж променю її відносної ціни капіталу. У системі координат « $L/Y - K/Y$ » величина $d_{FE}(X_j) = 1/\max t_j$ показує відстань цієї країни до рубежу економічної ефективності F_E вздовж променя її фондоозброєності праці.

Рубежі S_T та F_E є взаємно протилежними оболонками в системі координат « $L/Y - K/Y$ », а рубежі S_E та F_T взаємно протилежні в системі координат « $W/P - R/P$ ». Геометричні властивості цих рубежів досліджуються далі.

Реальні стани та реальні функції розподілу окремої країни. Розглянемо країну, яка має інтенсивності використання факторів виробництва k_0 , l_0 та ціни використання цих факторів r_0 , w_0 . Ці показники будемо відображати на двох площинах – технологічній площині « $L/Y - K/Y$ » та економічній площині « $W/P - R/P$ ». Точки з координатами $T_0(l_0, k_0)$ та $E_0(w_0, r_0)$ відобразатимуть поточні стани країни – відповідно технологічний та економічний. На «протилежних» площинах ці точки відобразатимуться як прями. Обернені величини являтимуть собою координати точок перетину цих прямих з осями координат.

Пряма $T_0(1/l_0, 1/k_0)$ на економічній площині буде містити усі економічні стани (w, r) , що можливі при даному технологічному стані (l_0, k_0) . З технологічної точки зору ця пряма буде множиною параметрів (w, r) усіх функцій розподілу продукту при даному технологічному стані (l_0, k_0) :

$$Y_0 = rK_0 + wL_0 \quad (18)$$

З економічної точки зору ця ж сама пряма буде функцією розподілу ціни з параметрами (l_0, k_0) :

$$P = k_0R + l_0W \quad (19)$$

Пряма $E_0(1/w_0, 1/r_0)$ на технологічній площині буде містити усі технологічні стани (l, k) , що можливі при даному економічному стані (w_0, r_0) . З економічної точки зору ця пряма буде множиною параметрів (l, k) усіх функцій розподілу ціни при даному економічному стані (w_0, r_0) :

$$P_0 = kR_0 + lW_0. \quad (20)$$

З технологічної точки зору ця ж сама пряма буде функцією розподілу продукту з параметрами (w_0, r_0) :

$$Y = r_0K + w_0L. \quad (21)$$

Обидві прями ділитимуть свої площини на дві частини. Точки, що на технологічній площині розташовані нижче прямої $E_0(1/w_0, 1/r_0)$, будуть кращими технологічними станами за однакової фондоозброєності праці ($\kappa = K/L$); а ті, що розташовані вище – кращими функціями розподілу ціни. Точки, що на економічній площині розташовані нижче прямої $T_0(1/l_0, 1/k_0)$, будуть кращими економічними станами за однакової відносної ціни капіталу ($\rho = R/W$); а ті, що розташовані вище – кращими функціями розподілу продукту.

Паралельне зрушення прямої $E_0(1/w_0, 1/r_0)$ додолу відображає підвищення технічної ефективності за рахунок зниження економічної (подорожчання факторів виробництва). Паралельне зрушення додолу прямої $T_0(1/l_0, 1/k_0)$ відображає підвищення економічної ефективності за рахунок зниження технічної ефективності (збільшення інтенсивності використання факторів виробництва).

Геометрична інтерпретація даних залежностей показана на рисунку 1.

У лівій частині рисунку 1. пряма E_0 опускається, у правій частині цього рисунку пряма T_0 піднімається. В результаті в обох випадках технічна ефективність зростає, а економічна – знижується.

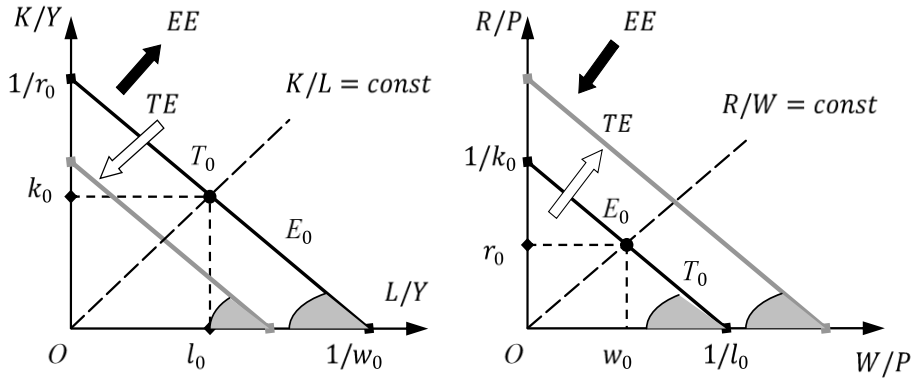


Рисунок 1 – Зміна поточного стану окремої країни

Віртуальні стани та віртуальні функції розподілу двох країн. Розглянемо дві країни – X_1 та X_2 , які характеризуються власними станами – $T_1(l_1, k_1)$, $E_1(w_1, r_1)$ та $T_2(l_2, k_2)$, $E_2(w_2, r_2)$, жоден з яких не є абсолютно кращим. Обидві країни, таким чином, є абсолютними лідерами, кожен з яких має найвищий рівень одного з показників ефективності:

$$l_1 < l_2 \quad k_1 > k_2 \quad w_1 > w_2 \quad r_1 < r_2. \tag{22}$$

На технологічній площині, пряма E_{12} , що проходить через точки їхніх станів буде являти собою віртуальну функцію розподілу продукту – єдину, при якій можуть реалізовуватися обидва ці стани. Доповнимо технологічну площину двома віртуальними країнами, що мають технологічні стани $O_1^L(l_1; \infty)$ та $O_2^K(\infty; k_2)$. Вертикальна пряма $T_1 O_1^L$ являтиме собою віртуальну функцію розподілу продукту з нульовою ціною капіталу $r = 0$ та ціною праці $w = 1/l_1$. Рухаючись по цій віртуальній прямій, країна X_1 могла б досягнути нульової фондомісткості, не змінюючи при цьому свою працемісткість. Горизонтальна пряма $T_2 O_2^K$ являтиме собою віртуальну функцію розподілу продукту з нульовою ціною праці $w = 0$ та ціною капіталу $r = 1/k_2$. Рухаючись по цій віртуальній прямій, країна X_2 могла б досягнути нульової працемісткості, не змінюючи при цьому свою фондомісткість. Точка перетину прямих $T_1 O_1^L$ та $T_2 O_2^K$ являє собою ідеальний технологічний стан $I_{12}^{TS}(l_1, k_2)$, в якому кожен з факторів виробництва використовуються з найвищою для двох країн ефективністю.

Такі самі залежності дістанемо і для станів країн на економічній площині. Пряма T_{12} , що проходить через точки їхніх станів E_1 та E_2 буде являти собою віртуальну функцію розподілу ціни – єдину, при якій можуть реалізовуватися обидва ці стани. Ідеальний економічний стан $I_{12}^{ES}(w_2, r_1)$ буде розташований в точці перетину віртуальних прямих $E_1 O_1^R$ та $E_2 O_2^W$. В цій точці фактори виробництва будуть найдешевшими.

Геометрична інтерпретація цих віртуальних функцій зображена на рисунку 2.

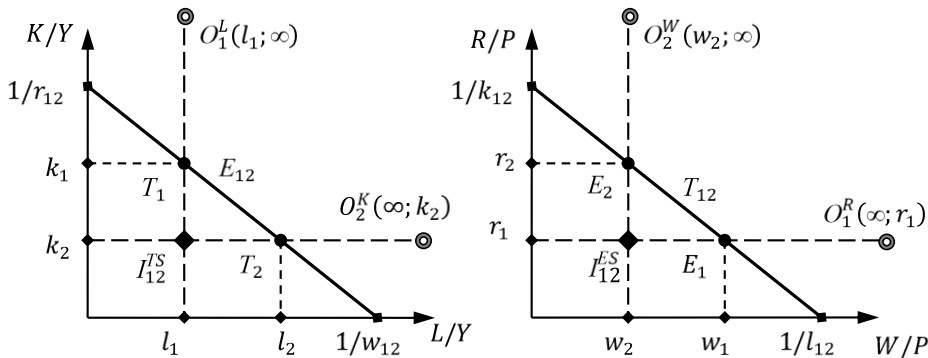


Рисунок 2 – Віртуальні функції розподілу, допустимі для обох країн без зміни їхніх станів

У лівій частині рисунку 2 пряма E_{12} є віртуальною функцією розподілу продукту, яка допустима для обох країн без зміни їхніх технологічних станів. У правій частині цього рисунку пряма

T_{12} є віртуальною функцією розподілу ціни, яка допустима для обох країн без зміни їхніх економічних станів.

Розглянемо тепер ті ж самі точки $T_1(l_1, k_1)$, $T_2(l_2, k_2)$ та $E_1(w_1, r_1)$, $E_2(w_2, r_2)$ не як точки станів, а як точки функцій розподілу: розподілу ціни – на технологічній площині і розподілу продукту – на економічній площині.

Тоді, на технологічній площині пряма E_{12} , що проходить через точки функцій розподілу ціни T_1 та T_2 буде являти собою віртуальний економічний стан – єдиний, при якому можуть реалізовуватися обидві ці функції. Точка $I_{12}^{PF}(l_2, k_1)$ являтиме собою ідеальну функцію розподілу ціни. В цій точці параметри функції розподілу ціни будуть найкращими (інтенсивності використання факторів виробництва – найвищими).

На економічній площині пряма T_{12} , що проходить через точки функцій розподілу продукту E_1 та E_2 , буде являти собою віртуальний технологічний стан – єдиний, при якому можуть реалізовуватися обидві ці функції. Точка $I_{12}^{YF}(w_1, r_2)$ являтиме собою ідеальну функцію розподілу продукту. В цій точці параметри функції розподілу продукту будуть найкращими (ціни на фактори виробництва – найвищими).

Геометрична інтерпретація цих віртуальних станів зображена на рисунку 3.

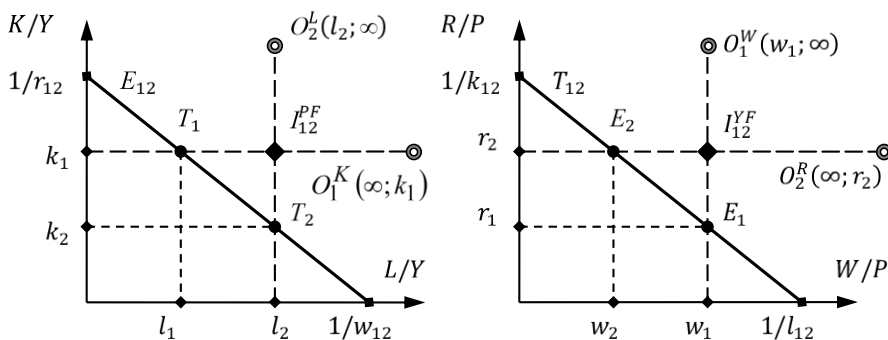


Рисунок 3 – Віртуальні стани, допустимі для обох країн без зміни їхніх функцій розподілу

У лівій частині рисунку 3 пряма E_{12} є віртуальним економічним станом, який допустимий для обох країн без зміни їхніх функцій розподілу ціни. У правій частині цього рисунку пряма T_{12} є віртуальним технологічним станом, який допустимий для обох країн без зміни їхніх функцій розподілу продукту.

Якщо усі реальні стани та реальні функції розподілу зобразити на протилежних площинах як лінії, то віртуальні функції та віртуальні стани відобразяться як точки їхнього перетину, а точки ідеальних станів та ідеальних функцій – як лінії, що перетинають осі координат. Геометрична інтерпретація такого способу відображення станів та функцій представлена на рисунку 4.

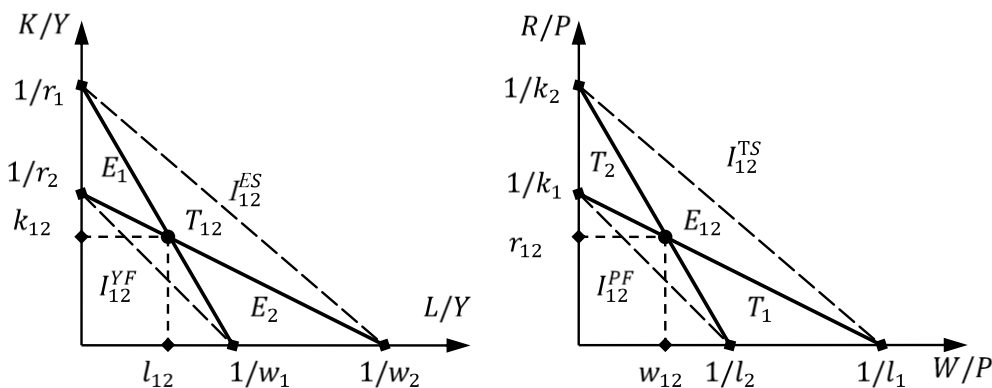


Рисунок 4 – Відображення реальних станів та реальних функцій розподілу як ліній

У лівій частині рисунку 4 прями E_1 та E_2 – реальні економічні стани (або реальні функції розподілу продукту). У правій частині цього рисунку T_1 та T_2 – реальні технологічні стани (або реальні функції розподілу ціни).

Світові рубежі ефективності. В залежності від того, який вид ефективності обирається – технічний або економічний, та за яким методом будується рубіж ефективності – як оболонка станів або як оболонка функцій, можна побудувати один з чотирьох рубежів ефективності. У даному дослідженні обмежимося проєкціями рубежів, що проходять через точки станів та функцій.

Таким чином, світовий технологічний рубіж, побудований на технологічній площині за методом оболонки станів (S_T), складатиметься з кращих відрізків віртуальних функцій розподілу продукту. Він буде опуклим дотолу: його крайня верхня ділянка буде вертикальною, а крайня нижня – горизонтальною. В його кутових точках будуть розташовані кращі технологічні стани.

Світовий економічний рубіж, побудований на тій самій площині за методом оболонки функцій розподілу ціни (F_E), буде складатися з відрізків кращих віртуальних економічних станів. Він буде опуклим вгору: його крайня верхня ділянка буде горизонтальною, а крайня нижня ділянка – вертикальною. В кутових точках цього рубежу будуть розташовані гірші технологічні стани.

На економічній площині матимемо аналогічну геометричну ситуацію. Світовий економічний рубіж, побудований за методом оболонки станів (S_E), буде опуклим дотолу. На ньому кутовими будуть кращі економічні стани. Світовий технологічний рубіж, побудований за методом оболонки функцій розподілу продукту (F_T), буде опуклим вгору. На ньому кутовими будуть гірші економічні стани.

Таким чином, на обох площинах, точки усіх країн будуть розташовані між технологічним та економічним рубежами. На технологічній площині точки перетину променя фондоозброєності країни-аутсайдера X ($\kappa_X = k_X/l_X$) з цими рубежами утворять віртуальні країни: $\Sigma_{XT}(l_{\Sigma X}, k_{\Sigma X})$ – на світовому технологічному рубежі за методом оболонки станів та $\Phi_{XE}(l_{\Phi X}, k_{\Phi X})$ – на світовому економічному рубежі за методом оболонки функцій. На економічній площині точки перетину променя відносної ціни капіталу цієї ж країни-аутсайдера X ($\rho_X = r_X/w_X$) з обома рубежами утворять дві інші віртуальні країни: $\Sigma_{XE}(w_{\Sigma X}, r_{\Sigma X})$ – на світовому економічному рубежі за методом оболонки станів та $\Phi_{XT}(w_{\Phi X}, r_{\Phi X})$ – на світовому технологічному рубежі за методом оболонки функцій.

Відношення координат реальної країни X та її віртуальних країн являтимуть собою відстані до відповідних рубежів:

$$d(\Sigma_{XT}) = \frac{l_{\Sigma X}}{l_X} = \frac{k_{\Sigma X}}{k_X} \leq 1 \quad d(\Phi_{XE}) = \frac{l_X}{l_{\Phi X}} = \frac{k_X}{k_{\Phi X}} \leq 1 \quad (23) (24)$$

$$d(\Sigma_{XE}) = \frac{w_{\Sigma X}}{w_X} = \frac{r_{\Sigma X}}{r_X} \leq 1 \quad d(\Phi_{XT}) = \frac{w_X}{w_{\Phi X}} = \frac{r_X}{r_{\Phi X}} \leq 1 \quad (25) (26)$$

$$d(\Sigma_T \Phi_E)_X = \frac{l_{\Sigma X}}{l_{\Phi X}} = \frac{k_{\Sigma X}}{k_{\Phi X}} < 1 \quad d(\Sigma_E \Phi_T)_X = \frac{w_{\Sigma X}}{w_{\Phi X}} = \frac{r_{\Sigma X}}{r_{\Phi X}} < 1 \quad (27) (28)$$

Обернені величини $d(\Sigma_{XT})^{-1}$ та $d(\Sigma_{XE})^{-1}$ покажуть, у скільки разів потрібно підвищити обсяг виробництва та рівень цін; обернені величини $d(\Phi_{XE})^{-1}$ та $d(\Phi_{XT})^{-1}$ – у скільки разів їх знизити. Величини $d(\Sigma_T \Phi_E)_X$ та $d(\Sigma_E \Phi_T)_X$ можна інтерпретувати як відстані між протилежними рубежами за напрямом країни X .

Геометрична інтерпретація усіх чотирьох рубежів та віртуальних країн на них показана на рисунку 5.

На рисунку 5 чорними жирними лініями показані світові технологічні рубежі, сірими жирними – світові економічні. S_T, S_E – світові рубежі за методом оболонки станів; F_E, F_T – за методом оболонки функцій.

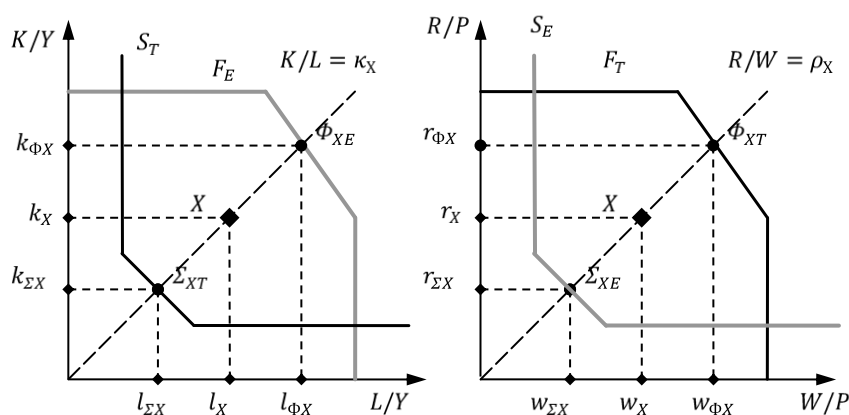


Рисунок 5 – Світові рубежі ефективності, що утворені двома лідерами, та віртуальні країни на них

Висновки. Відповідно до завдань, поставлених у даному дослідженні, були отримані наступні результати.

1. Запропоновано авторське розв'язання проблеми неповноти суто технологічного підходу до міжнародних рубежів ефективності. Доповнена класична модель DEA дозволила побудувати рубежі технічної та економічної ефективності за обома методами – оболонки фактичних станів (точок) країн та оболонки їхніх національних функцій розподілу.

2. В дослідженні показано, що з алгебраїчної точки зору пропонується модель парних рубежів ефективності (Paired Efficiency Frontier Model – PEF model) складається з двох пар задач лінійного програмування:

- двох задач на мінімізацію обсягів та цін факторів виробництва (13), (14), розв'язками яких є рубежі за методом оболонки станів країн (їх точок відповідно на технологічній та економічній площині);
- двох задач на максимізацію обсягів та цін факторів виробництва (16), (17), розв'язками яких є рубежі за методом оболонки національних функцій (відрізків прямих) розподілу продукту та його ціни.

References

1. Caselli, F., Coleman II, W. J. (2000), "The world technology frontier", *NBER Working Paper Series*. Working Paper 7904, available at: https://www.nber.org/system/files/working_papers/w7904/w7904.pdf
2. Cooper, W. W., Seiford, L. V., Tone K. (2006), *Introduction to data envelopment analysis and its uses*. With DEA-solver software and references. Springer Science+Business Media, Inc., 347 p.
3. Cooper, W. W., Seiford, L. V., Tone K. (2007), *Data envelopment analysis*. A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software. 2nd ed. Springer Science+Business Media, Inc, 490 p.
4. Charles, V., Kumar, M. (eds.) (2012), *Data envelopment analysis and its applications to management*. Cambridge Scholars Publishing, 270 p.
5. Sickles, R. C., Zelenyuk, V. V. (2019), *Measurement of productivity and efficiency*. Cambridge University Press, 594 p.
6. Emrouznejad, A., Cabanda, E. (2013), "Introduction to data envelopment analysis and its applications". In Osman et al. (eds.) *Handbook of Research on Strategic Performance Management and Measurement Using Data Envelopment Analysis*, IGI Global, USA, pp.235-255, available at: https://www.researchgate.net/publication/288994419_Introduction_to_Data_Envelopment_Analysis_and_its_Applications
7. Caselli, F., Coleman II, W. J. (2006), "The world technology frontier", *The American Economic Review*, Vol. 96, No. 3, pp. 499-522.
8. Vandenbussche, J., Aghion, P., Meghir, C. (2006), "Growth, distance to frontier and composition of human capital". *Journal of Economic Growth*, Vol. 11, Iss. 2, pp. 97-127.
9. Islam, M. R. (2010), "Human capital composition, proximity to technology frontier and productivity growth", *Monash Economics Working Papers*, Research Discussion Paper RDP 23-10, available at: https://www.monash.edu/__data/assets/pdf_file/0008/925433/human_capital_composition,_proximity_to_technology_frontier_and_productivity_growth.pdf

10. Krüger, J. J. (2017), "Revisiting the world technology frontier: A directional distance function approach", *Journal of Economic Growth*, Vol. 22, pp. 67-95.
11. Mastromarco, C., Simar, L. (2018), "Globalization and productivity: A robust nonparametric world frontier analysis", *Economic Modelling*, Vol. 69, pp. 134-149.
12. Growiec, J. (2008), "Productivity differences across OECD countries, 1970–2000: The world technology frontier revisited", *MPRA*, paper No. 11605, available at: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/11605/1/MPRA_paper_11605.pdf
13. Growiec, J. (2012), "The world technology frontier: What can we learn from the US States?", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 74, Iss. 6, pp. 777-807.
14. Keller, W. (2001), "The geography and channels of diffusion at the world's technology frontier", *ECONSTOR, HWWA Discussion Paper*, No. 123, available at: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/19428/1/123.pdf>
15. Cantner, U., Hanusch, H. (1999), "Heterogeneity and evolutionary change: Empirical conception, findings and unresolved issues", *EconPapers, Discussion Paper Series*, No. 190, available at: <https://vwl.wiwi.uni-augsburg.de/vwl/institut/paper/190.pdf>
16. Forstner, H., Isaksson, A. (2002), "Productivity, technology, and efficiency: An analysis of the world technology frontier when memory is infinite", *UNIDO, SIN Working Paper Series*, No. 7, available at: https://www.unido.org/sites/default/files/2006-10/sin_wps07_0.pdf
17. Lafuente, E., Acs, Z. J., Sanders, M., Szerb, L. (2020), "The global technology frontier: productivity growth and the relevance of Kirznerian and Schumpeterian entrepreneurship", *Small Business Economics*, Vol. 55, Iss. 1, pp. 153-178.
18. Madsen, J. B. (2014), "Human capital and the world technology frontier", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 96, Iss. 4, pp. 676-692.

I. O. Zagoruiko, L. O. Petkova

DEA METHOD AS A TOOL FOR COMPARATIVE ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF NATIONAL ECONOMIES

The paper deals with the theory of comparative analysis of the efficiency of national economies using the nonparametric method of data envelopment analysis (DEA).

The main works on the use of data envelopment analysis are studied. In order to develop the ideas of F. Caselli, W. J. Coleman II., J. Growiec it is proposed to take into account that the goal of producers in modern economy is not only to increase technical efficiency, which is expressed in reducing stock and labor intensity, but also to increase economic (in a narrow sense) efficiency that is the reduction of real prices of the used production factors. The subject of the research is an adequate representation of the interdependence of these "competing" goals in the theory of efficiency frontiers. In the study, all efficiency frontiers have been constructed in a purely nonparametric way reflecting a single period (in a standard form – a year). The goal is to solve the problem of incompleteness of a purely technological approach to the world efficiency frontiers that is to supplement the classical DEA model in a way to make it possible to build the boundaries of technical and economic efficiency using both methods – the envelopments of the actual states (points) of the countries and the envelopments of their national functions of the product distribution and its price. In accordance with the content of the proposed model of paired efficiency frontier model (PEF model), the geometric method is chosen as the main method for studying and interpreting the results obtained. Therefore, it is proven that it is possible to display a frontier using the envelopment method of functions distribution (straight lines) in one coordinate system as an envelopment of actual states (points) in an alternative system. This, in turn, significantly simplifies the range estimation of these borders.

In the course of the research, the following goals have been set: to determine algebraic forms of linear programming problems that adequately represent the frontiers of technical and economic efficiency; to outline the main points of view regarding the construction of a global technological frontier and to justify the feasibility of complementing it with a global economic frontier.

The proposed model contains four efficiency frontiers – technological and economic frontiers constructed using the method of the envelopment of actual states, and similar frontiers representing the envelopments of the functions of the product distribution and its price. In accordance with the content of the proposed model, the geometric method is chosen as the main method for studying the frontiers of efficiency and interpreting the results obtained. Hence, it is possible to display a frontier using the method of the

envelopment of distribution functions (straight lines) in one coordinate system as the envelopment of actual states (points) in an alternative system.

Keywords: *data envelopment analysis, world technology frontier, nonparametric approach, efficiency of national economies, labor productivity, return on assets.*

Стаття надійшла до редакції 31.08.2021

DOI 10.24025/2306-4420.62.2021.242067

Загоруйко І. О., канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри соціального забезпечення, Черкаський державний технологічний університет

e-mail: zagoruikovanmacro@gmail.com

ORCID 0000-0003-2819-0793

Zagoruiko I. O., Ph. D. in Economics, Docent, Associate Professor at the Department of Social Security, Cherkasy State Technological University

Петкова Л. О., д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри міжнародної економіки та бізнесу, Черкаський державний технологічний університет

e-mail: l_petkova@ukr.net

ORCID 0000-0003-4519-3726

Petkova L. O., Doctor of Economics, Full Professor, Head of the Department of International Economics and Business, Cherkasy State Technological University