

І. О. Загоруйко

ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ РІВНОВАГИ

Стаття присвячена формулюванню принципів макроекономічного моделювання та їх реалізації в теорії динамічної загальної рівноваги. Предметом теоретичного дослідження є закрита приватна економіка, в якій взаємодіють два макроекономічні суб'єкти – домашні господарства та інвестиційні фірми.

Відомі загальнонаукові принципи – аналізу розмірності, однорідності та відповідності – доповнюються специфічними принципами, що дозволяють отримати аналітичну форму поведінкових функцій. Загальні властивості цих функцій проаналізовано з точки зору теорії корисності. Виявлено зв'язок між рівняннями динаміки прибутку та формами інвестиційної функції. Проведено порівняльний аналіз їхніх властивостей. Запропоновано функції ставок плати за ресурси, що враховують їх обмеженість.

Показано, що в класичній моделі $AD - AS$, доповненій рівняннями динаміки основних виробничих фондів та рентабельності, виникають ендогенні циклічні коливання. Проведено математичний аналіз запропонованої моделі та подано її графічну інтерпретацію з використанням довгострокових кривих сукупного попиту та сукупної пропозиції. Визначено показники стану довгострокової рівноваги та умова його стійкості.

Розглянуто можливі напрямки розвитку запропонованої моделі. Зокрема, показано, що до цієї моделі може бути включений фінансовий ринок, на якому домашні господарства та інвестиційні фірми безпосередньо позичають гроші один одному. Цей ринок може бути зображений за допомогою двох симетричних функцій попиту-пропозиції, що зв'язують ставку відсотка, теперішні та очікувані в майбутньому запаси готівки.

Ключові слова: макроекономічна модель, закрита приватна економіка, методологія моделювання, динамічна загальна рівновага, теорія економічного циклу, модель $AD - AS$, поведінкові функції, макроекономічні суб'єкти, основні виробничі фонди, рентабельність.

Актуальність проблеми. Теорія загальної економічної рівноваги є однією з найбільш фундаментальних частин макроекономіки. З одного боку, вона синтезує моделі, що описують окремі ринки, явища та процеси. З іншого боку, вона є основою для теорій економічного циклу, економічного зростання та економічної політики держави. Логічним результатом моделей динамічної загальної рівноваги є відображення тих чи інших кон'юнктурних коливань національної або світової економіки. Економічні кризи 1997–1998, 2008–2009 рр. та очікування наступної кризи демонструють перманентну актуальність даної проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Усі минулі та очікувані потрясіння світової економіки не могли не вплинути на стан економічної теорії. К. Д. Хувер говорить навіть про її кризу. У своєму огляді економічної літератури він ставить фінансову кризу 2007–2009 рр. в один ряд з Великою депресією і відзначає, що обидві вони породили заклики до фундаментальних змін в економічній теорії [6]. При цьому різні вихідні позиції того чи іншого дослідника можуть суттєво впливати на оцінку параметрів навіть відомих функцій та моделей. Аналізу можливих ідеологічних ухилів у структурних макроекономічних моделях присвячена велика стаття Ж. Сен-Поля [11].

Однією з базових моделей сучасної макроекономіки є модель динамічної стохастичної загальної рівноваги – DSGE model. Велика кількість наукових праць присвячена аналізу різних версій цієї моделі. Так, Х. К. Парра-Альварес оцінює числові методи наближеного розв'язку задачі оптимізації в моделі DSGE з неперервним часом [10]. В. Налбан зазначає, що для відповідності фактам спостережуваного бізнес-циклу моделі DSGE мають бути доповнені жорсткістю різних макроекономічних величин, зокрема заробітної плати та цін [9]. С. Ілдірім-Караман пропонує нову версію цієї моделі, в якій потрясіння можуть виникати на фінансовому ринку, а вже потім передаватися в реальний сектор [14]. На основі неокейнсівської версії моделі DSGE із заставним обмеженням на фінансування інвестицій Т. Шірота приходиться до висновку про важливу роль у бізнес-циклах саме технологічних шоків [12].

Деякі автори зосереджуються на окремих аспектах макроекономічних коливань. Так, Дж. Де Джорджі та Л. Гамбетті досліджують вплив бізнес-циклів на споживання домашніх госпо-

дарств [2]. В агрегованій моделі ринку праці (П. Крюсель, Т. Мукояма, Р. Роджерсон, А. Шахін) досліджується циклічний рух робочої сили між станами зайнятості, безробіття та відмови від роботи [7]. Аналізу фіскальної політики за допомогою неокейнсіанської версії моделі DSGE присвячена стаття К. Бхаттарай та Д. Тшецякевіча [1]. Т. Ягіхаші порівнює дві відомі версії моделі DSGE – BGG та GK в контексті розробки грошово-кредитної політики [13]. Ф. Енглер та Й. Тервала аналізують вплив Трансатлантичного торговельного та інвестиційного партнерства (ТТІП) між США та ЄС. Для оцінки його впливу вони використовують функцію корисності для домашніх господарств з урахуванням споживання, реальних грошових запасів та пропозиції праці [3].

Багато авторів аналізують роль інформаційного чинника. Наприклад, в статті Л. Лабертіні, К. Мендічіно та М. Т. Пунці розглядається вплив очікувань та інформаційних шоків на ринку житла, що можуть призводити до періодів буму-спаду на цьому ринку та коливань бізнес-циклу [8]. В колективній праці італійських економістів (М. Форні, Л. Гамбетті, М. Ліппі, Л. Сала) досліджується роль інформаційних шоків як джерела коливань у бізнес-циклі [4]. Р. Гупта та ін. аналізують, як оцінювання за допомогою новин невизначеності економічної політики пояснює бізнес-цикл [5].

Як показує даний огляд, в сучасній економічній літературі відсутні роботи, предметом яких було б дослідження саме теоретичних засад моделювання загальної динамічної рівноваги. В результаті велика (і все зростаюча) кількість версій моделі DSGE перетворюється на непорядковану, а часом і суперечливу сукупність.

Формулювання цілей статті. Сформульовану вище проблему можна спробувати вирішити, обравши за вихідний пункт теоретичного дослідження найпростішу (скалярну) модель загальної рівноваги із ендогенно детермінованими процесами. При цьому вихідна модель має бути відкритою до поступового включення до неї нових ендо- та екзогенних чинників. В результаті вихідна детерміністська модель не суперечитиме стохастичному підходу, а доповнюватиме його.

На підставі цих міркувань можна сформулювати мету даної статті. Вона полягає у теоретичному дослідженні динамічної рівноваги реального сектору економіки з урахуванням обмеженості ресурсів (робочої сили й основних фондів) та неможливості їх повного використання.

Пропоноване дослідження здійснюється в два етапи. На першому етапі з'ясовуються методологічні принципи макроекономічного моделювання, які дозволяють отримати конкретну аналітичну форму функцій поведінки макроекономічних суб'єктів. На другому етапі показано застосування отриманих функцій в моделі динамічної загальної рівноваги та проведений її математичний аналіз.

Згідно моделі AD – AS зміна стану економіки відбувається в результаті зрушень кривих сукупного попиту та сукупної пропозиції. Такі зрушення відбуваються не тільки внаслідок екзогенних шоків. На думку автора, найбільш глибокими є такі ендогенні чинники, як зміна загального обсягу основних виробничих фондів, прибутку (або рентабельності) та розподіл загального обсягу грошової маси між головними макроекономічними суб'єктами.

Виходячи з цього, було поставлено завдання розробити найбільш загальну модель закритої приватної економіки, в якій випускається лише один продукт та взаємодіють два макроекономічні суб'єкти. За аналогією з моделлю DSGE таку модель можна назвати моделлю динамічної детерміністської загальної рівноваги – DDGE model. В цій моделі усі ендогенні величини є гнучкими, а екзогенні – сталими. Як буде показано далі, пропонується модель відкрита до включення нових ендогенних чинників.

Методологія побудови моделі DDGE. Першим етапом математичного моделювання будь-якої системи є побудова її якісної картини. У свою чергу, це неможливо без певних спрощень та припущень. Першим з них є традиційне неокласичне припущення, що кожний процес реалізується лише одним макроекономічним суб'єктом. Така ідеалізація дозволяє розкласти поведінку реальних суб'єктів на елементарні дії та мотиви і розглянути їх у чистому вигляді. В такій елементарній моделі взаємодіють три типи суб'єктів – виробничі й інвестиційні фірми, а також домашні господарства, що складаються виключно із працівників.

Ще одне аналогічне припущення полягає в тому, що кожний із макроекономічних суб'єктів володіє лише одним ресурсом (інвестиційні фірми – основними фондами, домашні господарства – робочою силою) або продуктом (виробничі фірми). Звідси випливає необхідність обміну між цими суб'єктами. У домашніх господарств виробничі фірми наймають робочу силу обсязі L за ставкою заробітної плати W , а в інвестиційних фірм вони орендують основні фонди в обсязі K за ставкою

орендної плати R . Обсяги задіяних ресурсів не можуть перевищувати їх загальних величин: $L < L_{\max}$, $K < K_{\max}$. Для відтворення ресурсів їхні власники купують за ціною P предмети споживання в обсязі C та основні фонди в обсязі I . Ці операції створюють потоки продуктів та грошей, які змінюють відповідні запаси.

Одним з відомих загальнонаукових принципів є *принцип однорідності*. Зокрема, у теоретичній фізиці використовується принцип однорідності часу. Він означає незалежність фізичних законів від моменту часу, в який розглядається система. Логічно вважати, що цей принцип має реалізуватися і в моделі загальної економічної рівноваги.

У середньостроковому періоді загальна величина робочої сили вважається сталою, а загальна величина основних фондів – змінною. В найпростішому вигляді їхня динаміка описується відомим рівнянням:

$$dK_{\max} / dt = I - hK, \quad (1)$$

де h – норма вибуття основних фондів, яка в даній моделі вважається сталою.

Позначивши грошові запаси домашніх господарств, інвестиційних та виробничих фірм відповідно M_L , M_K , M_Q , дістанемо такі рівняння:

$$dM_L / dt = WL - PC, \quad dM_K / dt = RK - PI, \quad dM_Q / dt = PY_D - VY_S, \quad (2), (3), (4)$$

де Y_D , Y_S – обсяги сукупного попиту та сукупної пропозиції (виробництва),

V – витрати виробництва одиниці продукції.

В закритій приватній економіці сукупний попит складається зі споживання та інвестицій, а середні витрати виробництва дорівнюють відношенню факторних доходів до обсягу виробленої продукції Y_S :

$$Y_D = C + I, \quad V = (WL + RK) / Y_S. \quad (5), (6)$$

Звідси випливає, що грошова маса є сталою: $M_L + M_K + M_Q = M$.

Різниця сукупної пропозиції та сукупного попиту створює приріст товарного запасу Q у виробничих фірм:

$$dQ / dt = Y_S - Y_D. \quad (7)$$

Ринкова вартість активів фірм дорівнює сумі їхніх грошових запасів та вартості негрошових активів:

$$A_Q = M_Q + PQ, \quad A_K = M_K + PK_{\max}. \quad (8), (9)$$

Результатом діяльності фірм є поточний прибуток, що дорівнює зміні вартості їхніх активів при сталому рівні цін та середніх витрат:

$$(R - hP)K = dM_K / dt + PdK_{\max} / dt, \quad (P - V)Y_D = dM_Q / dt + VdQ / dt. \quad (10), (11)$$

У свою чергу, поточний прибуток може розглядатися як похідна накопиченого прибутку Π :

$$(R - hP)K = d\Pi_K / dt, \quad (P - V)Y_D = d\Pi_Q / dt. \quad (12), (13)$$

Таким чином, ми отримали шість незалежних автономних диференціальних рівнянь. Зробимо традиційне спрощення – припустимо, що попит дорівнює пропозиції, а ціна – середнім витратам: $Y_D = Y_S$, $P = V$. Тоді величини M_Q та Q перетворяться на сталі, які логічно вважати рівними нулю. Це дає можливість виключити рівняння виробничих фірм. Внаслідок таких спрощень роль цих фірм стає номінальною і далі не враховується. Залишаються три диференціальних рівняння інвестиційних фірм.

Розглянемо тепер статичні рівняння моделі. Зі зроблених припущень про рівновагу товарного ринку та нульовий прибуток виробників випливають відомі рівняння розподілу валового продукту за видатками та доходами:

$$Y = C + I, \quad PY = RK + WL. \quad (14), (15)$$

Як бачимо, до моделі мають входити функції, що описують поведінку господарських суб'єктів – інвестиційна функція (f_I), функція споживання (f_C) та функції ставок плати за ресурси (f_R, f_W).

Крім поведінкових функцій, модель має містити виробничу функцію $Y = F(K, L)$. Як відомо, на макrorівні приймається гіпотеза сталого ефекту масштабу виробництва. Цій гіпотезі відповідає лінійно однорідна виробнича функція. Найпростішою такою функцією є функція Леонтьєва:

$$Y = K / b_K = L / b_L, \quad (16)$$

де b_K, b_L – коефіцієнти ресурсомісткості валового продукту. За такої функції ефект взаємозаміни ресурсів матиме статистичну природу і може бути пояснений змінами в режимі праці, технологіях та пропорціях комбінування ресурсів (що відображається за допомогою ламаних ізоквант) або інших неврахованих чинників. Підставляючи функцію Леонтьєва до рівняння доходів, дістанемо рівняння утворення ціни продукту:

$$P = b_K R + b_L W. \quad (17)$$

Більш конкретну форму поведінкових функцій можна отримати за допомогою **принципу доступної інформації**. Згідно з цим принципом до функції включаються лише ті фактори, інформація про які доступна саме тому макроекономічному суб'єкту, поведінку якого вона описує. Математично принцип доступної інформації виражається в тому, що поведінкові функції мають бути явними.

Розглянемо аргументи цих функцій докладніше. Кожному суб'єкту відомий його грошовий запас на даний момент часу. Грошові запаси впливають на всі аспекти поведінки макроекономічних суб'єктів. З урахуванням цього, функції f_I та f_R мають містити аргумент M_K , а функції f_C та f_W – аргумент M_L . Загальна величина грошової маси їм невідома, тому M не є аргументом цих функцій.

Для визначення ставок R та W власникам ресурсів потрібно знати попит на них (зрозуміло, що власні ресурси K_{\max} та L_{\max} їм відомі). Однак під час прийняття цього рішення ціна на товари їм ще невідома – її визначають виробничі фірми. Отже, обсяги попиту на ресурси є аргументами функцій f_R та f_W , а ціна товарів – ні. Аналогічно, для того, щоб покупці товарів могли зробити свій вибір, їм потрібно знати ціну. Однак обсяг виробництва товарів їм невідомий. Він визначатиметься виробничими фірмами. Отже, ціна має бути аргументом функцій f_I та f_C , а обсяг виробництва – ні.

Якби виробничі фірми розглядалися як самостійний макроекономічний суб'єкт, то власні рішення щодо ціни товару та обсягу його виробництва вони приймали б на підставі інформації про власні запаси (грошей та товарів), власний прибуток та витрати виробництва. Однак у пропонованій моделі їхня роль вважається суто номінальною, внаслідок чого процес взаємоузгодження попиту з пропозицією, а ціни – з витратами відбувається миттєво. Це надає доступ до інформації про теперішній рівноважний стан економіки, проте майбутній рівень цін та майбутній обсяг виробництва для домашніх господарств та інвесторів залишаються невідомими. На цій підставі P' та Y' виключені з числа аргументів поведінкових функцій.

Виключені також інші динамічні величини – $M'_K, M'_L, \Pi'_K, K'_{\max}$. Це зумовлено тим, що праві частини відповідних диференціальних рівнянь містять ці ж самі поведінкові функції і тому використання в якості аргументів $M'_K, M'_L, \Pi'_K, K'_{\max}$ означало би, що поведінкові функції пояснювали би самі себе.

Отже, на підставі принципу доступної інформації отримуємо наступну форму поведінкових функцій:

$$\begin{aligned} \text{— інвестиційних фірм: } & I = f_I(P; M_K, \Pi_K), R = f_R(M_K, K, K_{\max}); \\ \text{— домашніх господарств: } & C = f_C(P, M_L), W = f_W(M_L, L, L_{\max}). \end{aligned}$$

Як бачимо, усі вони є явними функціями.

Набір вихідних аргументів $P, M_K, M_L, \Pi_K, K, L, K_{\max}, L_{\max}$ можна по-різному комбінувати, отримуючи аргументи більш високих порядків. Однак, усі такі комбінації мають відповідати **принципу змістовності**. Наприклад, економічний сенс мають такі комбінації, як:

— реальні величини: $M_K / P, M_L / P, \Pi_K / P$;

— обсяги незадіяних ресурсів та ступені їх використання: $K_{\max} - K, L_{\max} - L, \kappa = K / K_{\max}, \lambda = L / L_{\max}$;

— відношення або різниця статей пасивів та активів: $\Pi_K / M_K, \Pi_K - M_K, \Pi_K / K_{\max}, M_K / K_{\max}, \Pi_K / (PK_{\max}), M_K / (PK_{\max})$.

В моделі DDGE економіка весь час перебуває в стані короткострокової рівноваги. З математичної точки зору він є розв'язком системи з двох явних функцій – сукупного попиту як функції рівня цін та середніх витрат як функції обсягу виробництва:

$$\begin{cases} Y_D = C(P) + I(P) \\ V = b_K R(Y_S) + b_L W(Y_S) \end{cases} \quad \text{де } Y_D = Y_S, V = P. \quad (18), (19)$$

Усі розглянуті залежності є функціями від декількох факторів (аргументів). З теоретичної точки зору бажано, щоб усі поведінкові (та обернені до них) функції були однозначними. Іншими словами, економічні суб'єкти повинні змінювати характер своєї поведінки тільки внаслідок зміни напряму економічних процесів. Це твердження можна назвати **принципом однозначності**. Математично він виражається в тому, що знак відповідної частинної похідної не повинен змінюватися, а отже функція не повинна мати екстремум. Пропонованому принципу можна надати і більш сильну форму: поведінкова функція не повинна містити «особливі» ділянки. Математично це означає відсутність точок перетину її графіка і незмінність знаку другої частинної похідної.

Даний принцип дозволяє конкретизувати форму поведінкових функцій. Очевидно, що прибуток (або рентабельність) стимулює інвестиції, причому прискорено: $\partial I / \partial \Pi_K > 0, \partial^2 I / \partial \Pi_K^2 > 0$.

Знаки решти похідних поведінкових функцій можна визначити на основі теорії корисності. Розглянемо це на прикладі домашніх господарств.

Цей макроекономічний суб'єкт зацікавлений більше споживати, менше працювати і мати більше грошей. Таку поведінку можна описувати різними функціями корисності, але усі вони повинні відповідати принципу однозначності. Елементарною функцією такого типу є адитивна функція:

$$U = U_C(C) + U_L(L_{\max} - L) + U_M(M_L). \quad (20)$$

Для цієї функції мають виконуватися закон ненасичуваності:

$$\partial U / \partial C > 0, \quad \partial U / \partial (L_{\max} - L) > 0, \quad \partial U / \partial M_L > 0, \quad (21), (22), (23)$$

та закон спадної граничної корисності:

$$\partial^2 U / \partial C^2 < 0, \quad \partial^2 U / \partial (L_{\max} - L)^2 < 0, \quad \partial^2 U / \partial M_L^2 < 0. \quad (24), (25), (26)$$

У даній функції граничні корисності є функціями цих же аргументів і тому теж повинні відповідати принципу однозначності. За умови, що графіки граничних корисностей є спадними кривими, які не перетинають вісь абсцис, наступні похідні є додатними:

$$\partial^3 U / \partial C^3 > 0, \quad \partial^3 U / \partial (L_{\max} - L)^3 > 0, \quad \partial^3 U / \partial M_L^3 > 0. \quad (27), (28), (29)$$

Розглянемо купівлю споживчих товарів та пропозицію праці. Якщо обмін грошей на товари та праці на гроші є еквівалентним, то загальна корисність не змінюватиметься. Звідси дістанемо:

$$\partial U / \partial C = -(dM_L / dC) \cdot (\partial U / \partial M_L), \quad (30)$$

$$-dM_L / d(L_{\max} - L) = [\partial U / \partial (L_{\max} - L)] : [\partial U / \partial M_L]. \quad (31)$$

Припустимо, що на протязі деякого періоду часу τ ціна товару та ставка заробітної плати не змінювалися. Тоді грошовий запас можна представити як суму початкового запасу та накопиченої різниці доходів та видатків за цей період:

$$M_L = M_L(0) + \int_0^{\tau} (WL - PC) dt. \quad (32)$$

Відповідні похідні грошового запасу дорівнюватимуть:

$$dM_L / dC = -\tau P, \quad dM_L / dL = \tau W \quad dM_L / d(L_{\max} - L) = -\tau W. \quad (33), (34), (35)$$

Тепер можна визначити знаки похідних функції споживання $C = f_C(P, M_L)$ та функції ставки заробітної плати $W = f_W(M_L, L, L_{\max})$.

Диференціюючи граничну корисність споживання по ціні товару дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \partial(\partial U / \partial C) / \partial P &= \tau \cdot \partial U / \partial M_L > 0 \\ \partial(\partial U / \partial C) / \partial P &= (\partial^2 U / \partial C^2) \cdot (\partial C / \partial P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial C / \partial P < 0, \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial^2(\partial U / \partial C) / \partial P^2 &= 0 \\ \partial^3 U / (\partial C \cdot \partial P^2) &= (\partial^3 U / \partial C^3) \cdot (\partial C / \partial P)^2 + (\partial^2 U / \partial C^2) \cdot (\partial^2 C / \partial P^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial^2 C / \partial P^2 > 0 \quad (37)$$

Диференціюючи ставку заробітної плати по праці, дістанемо:

$$\tau \cdot \partial W / \partial L = -\left[\partial^2 U / \partial (L_{\max} - L)^2 \right] : \left[\partial U / \partial M_L \right] > 0, \quad \partial W / \partial L_{\max} < 0. \quad (38), (39)$$

$$\tau \cdot \partial^2 W / \partial L^2 = \left[\partial^3 U / \partial (L_{\max} - L)^3 \right] : \left[\partial U / \partial M_L \right] > 0, \quad \partial^2 W / \partial L_{\max}^2 > 0. \quad (40), (41)$$

Застосовуючи аналогічний підхід до функцій f_I та f_R , дістанемо:

$$\partial I / \partial P < 0, \quad \partial^2 I / \partial P^2 > 0, \quad (42), (43)$$

$$\partial R / \partial K > 0, \quad \partial^2 R / \partial K^2 > 0, \quad (44), (45)$$

$$\partial R / \partial K_{\max} < 0, \quad \partial^2 R / \partial K_{\max}^2 > 0. \quad (46), (47)$$

Диференціюючи граничну корисність споживання по грошовому запасу, дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \partial(\partial U / \partial C) / \partial M_L &= \tau P \cdot \partial^2 U / \partial M_L^2 < 0 \\ \partial(\partial U / \partial C) / \partial M_L &= (\partial^2 U / \partial C^2) \cdot (\partial C / \partial M_L) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial C / \partial M_L > 0. \quad (48)$$

Диференціюючи ставку заробітної плати по грошовому запасу, дістанемо:

$$\tau \cdot \partial W / \partial M_L = -\left[\partial U / \partial (L_{\max} - L) \right] \cdot \left[\partial^2 U / \partial M_L^2 \right] : \left[\partial U / \partial M_L \right]^2 > 0. \quad (49)$$

Аналогічним чином, $\partial I / \partial M_K > 0$, $\partial R / \partial M_K > 0$.¹

З точки зору теорії корисності роль грошового запасу в цих функціях можна пояснити таким чином. Зі збільшенням грошового запасу його загальна корисність зростає, але гранична – зменшується, і навпаки. В результаті за наступну сплачену грошову одиницю покупці вимагатимуть більше одиниць продукції, і ціна попиту зменшуватиметься. У постачальників ресурсів відбуватиметься збільшення грошового запасу, тому за кожну отриману грошову одиницю вони віддаватимуть все меншу кількість ресурсу, тобто підвищуватимуть плату за нього. Зокрема, чим менше грошей матимуть працівники, тим на меншу ставку заробітної плати вони будуть змушені погоджуватися.

Як бачимо, на відміну від виробничої функції, усі поведінкові функції містять фактори, які впливають на них протилежним чином і можуть взаємно нейтралізуватися. Якщо аргументи поведінкової функції можна представити як відношення таких факторів, то вона буде мати нульову однорідність:

$$C = f_C(M_L / P), \quad R = f_R(M_K / K_{\max}; K / K_{\max}), \quad W = f_W(M_L / L_{\max}; L / L_{\max}).$$

Додаткові обмеження на форму поведінкових функцій накладає принцип однозначності стану та динаміки економічної системи в цілому. Ціна впливає на складові сукупного попиту від'ємним чином, а обсяг виробництва на складові середніх витрат – додатним. Це однозначно визначає нахил

¹ Що стосується знаків інших похідних $\partial^2 / \partial M_L^2$, $\partial^2 / \partial M_K^2$, то для їх визначення теорії корисності вже недостатньо. Ця проблема розв'язується за допомогою іншого принципу, який буде розглянутий далі.

цих кривих ($\partial Y / \partial P < 0$, $\partial P / \partial Y > 0$) і забезпечує єдину точку їх перетину – точку короткострокової рівноваги E_t .

Точка довгострокової рівноваги E_N визначається системою вже відомих диференціальних рівнянь K'_{\max} , M'_K та Π'_K (або іншого фактора прибутковості). Для того, щоб вона мала розв'язок, їхні праві частини повинні містити величини K_{\max} , M_K та Π_K . Це додатково пояснює, чому дані величини були включені до аргументів поведінкових функцій. З іншого боку, диференціальні рівняння розв'язані відносно їхніх похідних, оскільки K'_{\max} , M'_K та Π'_K відсутні у поведінкових функціях.

Внаслідок зміни обсягу основних фондів, грошових запасів та прибутку ці функції змінюються, що призводить до зрушення кривих сукупного попиту та сукупної пропозиції.

Розглянемо з цієї точки зору вплив грошових запасів за умови $\Pi_K = const$. Відповідний варіант системи балансових рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} P = b_K R(Y, K_{\max}, M_K) + b_L W(Y, M_L) \\ Y = C(P, M_L) + I(P, M_K) \end{cases} \quad (50)$$

Продиференціюємо ці рівняння за часом і розв'яжемо отриману систему відносно Y' та P' . В результаті дістанемо:

$$\begin{pmatrix} Y' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y}{\partial P} & +1 \\ -1 & \frac{\partial P}{\partial Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial K_{\max}} & \frac{\partial P}{\partial M_K} \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial M_K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K'_{\max} \\ M'_K \end{pmatrix}, \quad (51)$$

де Δ – визначник системи. Оскільки $\partial Y / \partial P < 0$, а $\partial P / \partial Y > 0$, то визначник системи завжди додатний. Залежність між ціною та загальним запасом основних фондів теж має сталий знак: $\partial P / \partial K_{\max} < 0$. Однак знаки $\partial P / \partial M_K$ та $\partial Y / \partial M_K$ не є сталими, оскільки збільшення грошового запасу фірм зменшує грошовий запас домашніх господарств. Це означає, що навіть при сталих основних фондах та сталому накопиченому прибутку вплив грошових запасів фірм може мати різні наслідки. Для елементарної моделі загальної рівноваги така неоднозначність неприйнятна.

Розглянемо тепер вплив прибутку (або рентабельності) за умови сталих грошових запасів. Відповідний варіант системи балансових рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} P = b_K R(Y, K_{\max}) + b_L W(Y) \\ Y = C(P) + I(P, X) \end{cases}, \quad (52)$$

де X – фактор прибутку або рентабельності. Продиференціюємо балансові рівняння цієї системи за часом:

$$\begin{pmatrix} Y' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y}{\partial P} & +1 \\ -1 & \frac{\partial P}{\partial Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial K_{\max}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial X} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K'_{\max} \\ X' \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Оскільки $\partial Y / \partial X > 0$, невизначеність зникає.

В такому варіанті моделі інвестиційні фірми не є цілком самостійним макроекономічним суб'єктом. Вони належать домашнім господарствам, а тому їхні доходи додаються і можуть бути використані як на споживання, так і на інвестиції. Додаються та спільно використовуються грошові запаси.

Крім принципу однорідності, ще одним важливим загальнонауковим принципом є **врахування розмірностей**. В природничих науках і, насамперед, у фізиці, одним з основних принципів є дотримання однакової розмірності в обох частинах одного рівняння. Елементарним прикладом є рівняння швидкості $v = s / t$, відповідно до якого вона вимірюється в одиницях відстані за одиницю часу. Тому логічно покласти даний принцип в основу макроекономічної моделі.

У запропонованій моделі основними змінними є час t , грошові запаси M_K , M_L , робоча сила L та основні фонди K , K_{\max} , що мають розмірності відповідно t , m , l , k . Решта змінних величин є похідними з точки зору розмірностей. Це валовий продукт Y , його складові – споживання C та інвестиції I з однаковими розмірностями q/t , де q – одиниця продукції; ціна P та її складові – ставки орендної та заробітної плати R , W з розмірностями m/q , $m/(kt)$, $m/(lt)$. Як наслідок, в рівнянні розподілу валового продукту обидві частини мають розмірність потоку продукції q/t , а в рівнянні динаміки грошових запасів – розмірність грошового потоку:

$$\dim(RK - PI) = \left(\frac{m}{kt}\right) \cdot k - \left(\frac{m}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{t}\right) = \frac{m}{t}. \quad (54)$$

$$\dim(WL - PC) = \left(\frac{m}{lt}\right) \cdot l - \left(\frac{m}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{t}\right) = \frac{m}{t}. \quad (55)$$

В кожному з цих двох рівнянь доданки обох частин безпосередньо мали однакову розмірність і не потребували використання розмірних сталих. В двох інших рівняннях такі розмірні сталі є необхідними.

Справді, приріст загального запасу основних фондів dK_{\max}/dt має розмірність k/t . В силу однопродуктового характеру моделі ($k = q$) таку ж саму розмірність мають інвестиції I . Потік вибухливих фондів теж має розмірність k/t . Його можна представити або новою змінною, або виразити через стару, як це і зроблено в даній моделі. В останньому випадку необхідно скористатися сталою h з розмірністю $1/t$. В результаті дістанемо:

$$\dim(I - hK) = \left(\frac{k}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{t}\right) - \left(\frac{1}{t}\right) \cdot k = \frac{k}{t}. \quad (56)$$

Оскільки норма вибуття має розмірність $1/t$, то її можна представити як величину, обернену до нормативного строку експлуатації основних фондів: $h = 1/T$.

В рівнянні цін для балансування розмірностей потрібні дві розмірні сталі $-b_K$ та b_L :

$$\dim(b_K R + b_L W) = \left(\frac{kt}{q}\right) \cdot \left(\frac{m}{kt}\right) + \left(\frac{lt}{q}\right) \cdot \left(\frac{m}{lt}\right) = \frac{m}{q}. \quad (57)$$

Ті ж самі сталі використані й у виробничій функції:

$$\dim\left(\frac{K}{b_K}\right) = k : \left(\frac{kt}{q}\right) = \frac{q}{t}, \quad \dim\left(\frac{L}{b_L}\right) = l : \left(\frac{lt}{q}\right) = \frac{q}{t}. \quad (58),(59)$$

Ще дві розмірні сталі потрібні для врахування обмеженості робочої сили (L_{\max}) та грошової маси (M).

Розглянемо тепер поведінкові функції I , C , R , W та їхні аргументи. Ступені використання ресурсів $\kappa = K/K_{\max}$, $\lambda = L/L_{\max}$ та рентабельність є безрозмірними величинами, тому вони потребуватимуть безрозмірних сталих. Реальні грошові запаси M_K/P , M_L/P та реальний прибуток Π_K/P мають розмірність q . Відношення грошових запасів до запасів ресурсів M_K/K_{\max} , M_L/L_{\max} мають розмірність m/k та m/l відповідно. Отже, для балансування обох частин функцій потрібні сталі з розмірністю t , які можна інтерпретувати як планові періоди. Тоді:

$$\dim I = \left(\frac{1}{t}\right) \cdot m : \left(\frac{m}{q}\right) = \frac{q}{t}, \quad \dim C = \left(\frac{1}{t}\right) \cdot m : \left(\frac{m}{q}\right) = \frac{q}{t}. \quad (60), (61)$$

$$\dim R = \left(\frac{1}{t}\right) \cdot m : k = \frac{m}{kt}, \quad \dim W = \left(\frac{1}{t}\right) \cdot m : l = \frac{m}{lt}. \quad (62), (63)$$

Звернемо увагу, що за умови що M_K та M_L є єдиними величинами з розмірністю m , усі поведінкові функції будуть лінійними по цих аргументах:

$$\partial^2 C / \partial M_L^2 = \partial^2 W / \partial M_L^2 = 0, \quad \partial^2 I / \partial M_K^2 = \partial^2 R / \partial M_K^2 = 0. \quad (64), (65)$$

Третім важливим загальнонауковим принципом є **принцип відповідності**. Згідно з цим принципом, моделі, що описують вужче коло процесів та явищ, мають бути окремим випадком більш загальної моделі. З цієї точки зору пропонується нелінійна модель може розглядатися як деяке узагальнення відомої задачі лінійного програмування.

Справді, в лінійній моделі економіки з n галузями, обсяги виробництва $\bar{X} = \{x_j\}$ обмежені наявними ресурсами $\bar{Z} = \{z_i\}$:

$$A\bar{X} \leq \bar{Z}, \quad (66)$$

де $A = \{a_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів прямих витрат. Сукупна вартість випущеної продукції дорівнює $\bar{P}\bar{X}$, де $\bar{P} = \{p_j\}$, і може розглядатися як цільова функція $\bar{P}\bar{X} \rightarrow \max$.

Таким чином, у прямій лінійній моделі вектор випуску \bar{X} є функцією від заданого вектору цін \bar{P} . Пропонується нелінійна модель не є оптимізаційною, але і в ній обсяги споживчого та інвестиційного попиту є функціями рівня цін, для яких виконується закон попиту.

З іншого боку, двоїста лінійна модель містить обмеження ставок плати за використання ресурсів $\bar{V} = \{v_i\}$ цінами продукції і цільову функцію мінімізації сукупних витрат на ресурси:

$$\bar{V}A \geq \bar{P}, \quad \bar{V}\bar{Z} \rightarrow \min. \quad (67), (68)$$

Таким чином, у двоїстій лінійній моделі вектор ставок оплати \bar{V} є функцією від заданого вектору ресурсів \bar{Z} . Відповідно, у запропонованій нелінійній моделі ставки орендної та заробітної плати є функціями наявних обсягів ресурсів, для яких виконується закон спадної граничної корисності: чим більшим є наявний обсяг даного ресурсу, тим менше його гранична корисність, а отже і ставка плати за нього.

Рівність оптимальних значень цільової функції лінійної моделі перетворюється на традиційну у макроекономіці рівність доходів та видатків.

Аналітичні вирази функцій моделі DDGE. Тепер, на основі розглянутих принципів можна остаточно визначити форму усіх поведінкових функцій.

Найпростішою функцією споживання, що відповідає принципу «балансу розмірностей» є:

$$\tau_c PC = M_L, \quad (69)$$

де τ_c – плановий період, на протязі якого домашнім господарствам вистачає грошового запасу для підтримання даного рівня видатків. Еквівалентна форма цієї функції $\tau_c C = M_L / P$ показує, що споживчий попит є прямо пропорційним реальному грошовому запасу домашніх господарств. Інша еквівалентна форма $PC / M_L = 1 / \tau_c$ означає, що домашні господарства витрачають свої кошти зі сталою швидкістю.

В даній моделі функції ставок плати за ресурси виконують роль функцій пропозиції. Ці функції повинні відображати неможливість повного використання наявних ресурсів. Звідси впливає наявність у них вертикальних асимптот. Це означає, що при зменшенні вільних резервів до нуля загальна корисність U , яку отримують власники від володіння ними, нескінченно зменшується. В результаті кожну наступну одиницю, яка буде запропонована на ринку ресурсів, її власники цінуватимуть все більше і вимагатимуть за неї все більшу ставку плати.

Найпростіші функції, що відповідають принципу «балансу розмірностей», мають вигляд:

$$\tau_R R / M_K = (K_{\max}^\alpha - K^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad (70)$$

$$\tau_W W / M_L = (L_{\max}^\beta - L^\beta)^{-1/\beta}, \quad (71)$$

де τ_R, τ_W – планові періоди, а α та β – безрозмірні параметри. Для цих функцій принцип однозначності виконується при $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ ². В цих функціях мінімальні ставки плати залежать від співвідношення грошового запасу до загального обсягу ресурсу:

$$R_{\min} = M_K / (\tau_R K_{\max}), \quad W_{\min} = M_L / (\tau_W L_{\max}). \quad (72)$$

При $\alpha = 1, \beta = 1$ функції f_R та f_W матимуть вигляд:

$$\tau_R R (K_{\max} - K) = M_K, \quad \tau_W W (L_{\max} - L) = M_L. \quad (73), (74)$$

В цьому випадку τ_R, τ_W можна розглядати як періоди, на протязі яких грошового запасу вистачає для компенсації доходу, втраченого внаслідок неповного використання ресурсів.

Пропоновані функції f_R та f_W відображають процес формування ставок плати за ресурси. Розглянемо це на прикладі утворення ставки заробітної плати. Припустимо, що працівники вимагають від роботодавців надбавки до мінімальної заробітної плати пропорційно рівню зайнятості. При цьому, отримавши таку надбавку, вони починають вимагати надбавку вже до цієї надбавки і так далі, до нескінченності. В результаті процес формування ставки заробітної плати набуде вигляду:

$$W / W_{\min} = 1 + \lambda \cdot (1 + \lambda \cdot (1 + \lambda \dots)) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = 1 / (1 - \lambda). \quad (75)$$

При $\beta > 1$ коефіцієнт надбавки буде меншим

$$[1 + \lambda^\beta]^{1/\beta} < 1 + \lambda, \quad (76)$$

а процес формування ставки заробітної плати набуде вигляду:

$$W / W_{\min} = (1 + \lambda^\beta + \lambda^{2\beta} + \lambda^{3\beta} + \dots)^{1/\beta} = [1 / (1 - \lambda^\beta)]^{1/\beta}. \quad (77)$$

Якщо працівники не мають можливості впливати на процес формування ставки заробітної плати, то функція f_W перетворюється на обернену функцію пропозиції праці f_L :

$$L = \{L_{\max}^\beta - [M_L / (\tau_W W)]^\beta\}^{1/\beta}. \quad (78)$$

В цьому випадку збільшення ставки заробітної плати знецінюватиме наявний грошовий запас M_L і для того, щоб його збільшити, працівники будуть працювати більше. В міру накопичування грошового запасу існуюча ставка заробітної плати буде сприйматися відносно все меншою і пропозиція праці зменшуватиметься.

Дану ситуацію можна описати на основі класичного підходу, згідно з яким домашні господарства обирають між споживанням та дозволями. З урахуванням елементарного характеру моделі в якості дозвілля будемо розглядати величину безробіття $L_{\max} - L$. Розглянемо вже відому макроекономічну функцію корисності:

$$U = U_C(C) + U_L(L_{\max} - L) + U_M(M_L). \quad (79)$$

В даний момент часу домогосподарство може обирати величини споживання та праці. Це дає можливість визначити середній приріст корисності за певний період τ : $\Delta U_C / \tau, \Delta U_L / \tau$. Навпаки, величину вже накопиченого грошового запасу домогосподарство змінити не може. Проте, обираючи величини C та L воно може змінити миттєвий приріст цього запасу. Звідси випливає можливість визначити величину dU_M / dt . З цих міркувань випливає функція приросту корисності за одиницю часу:

² Наприклад, $\partial W / \partial L = W \cdot [L^\beta (\beta - 1)] / [L_{\max}^\beta - L^\beta]$, звідки $\partial^2 W / \partial L^2 > 0$. Аналогічно, $\partial W / \partial M_L = -[W / M_L] / [1 - (L / L_{\max})^\beta]$, звідки $\partial^2 W / \partial M_L^2 > 0$.

$$U_t^* = \Delta U_C / \tau + \Delta U_L / \tau + dU_M / dt. \tag{80}$$

Всі складові цієї функції повинні мати однакову розмірність. Це виконується тоді, коли усі прирости є безрозмірними величинами. Даній вимозі відповідають тільки логарифмічні функції корисності:

$$\Delta U_C = \gamma_C \ln(C_1 / C_0), \quad \Delta U_L = \gamma_L \ln\left(\frac{L_{\max} - L_1}{L_{\max} - L_0}\right), \quad dU_M = \gamma_M d \ln M_L, \tag{81}, (82), (83)$$

де $\gamma_C, \gamma_L, \gamma_M$ – безрозмірні сталі. Оскільки значення функції корисності в початковий момент часу є сталим, нову функцію можна представити у вигляді:

$$U_t^* = \gamma_C (\ln C) / \tau + \gamma_L [\ln(L_{\max} - L)] / \tau + \gamma_M d \ln M_L / dt. \tag{84}$$

Ця функція досягає максимуму, якщо

$$\gamma_C / (\tau C) - \gamma_M P / M_L = 0, \quad -\gamma_L / [\tau(L_{\max} - L)] + \gamma_M W / M_L = 0. \tag{85}, (86)$$

Отримані рівняння є еквівалентною формою вже відомих поведінкових функцій f_C та f_W .

Звернемося тепер до інвестиційної функції. Її конкретний вигляд залежить від обраної форми рівняння динаміки прибутку або рентабельності. Можливі три варіанти такого рівняння:

— накопиченого абсолютного прибутку Π_K :

$$d\Pi_K / dt = (R - hP)K, \tag{87}$$

— накопиченого відносного прибутку P_{\min} :

$$dP_{\min} / dt = (R - hP) \cdot (K / K_{\max}), \tag{88}$$

— підсумкової (за тривалий час) рентабельності основних фондів J :

$$dJ / dt = [(R - hP)K] / [PK_{\max}]. \tag{89}$$

Першому рівнянню відвідає інвестиційна функція $I = f_I(P; M_K, \Pi_K)$. В цій функції аргумент Π_K має розмірність m . Формально, цій розмірності відповідають такі інвестиційні функції:

$$\tau_I PI = \Pi_K + M_K, \quad \tau_I PI = M_K \cdot f(\Pi_K / M_K), \quad \tau_I I(P - \Pi_K / K_{\max}) = M_K, \tag{90}, (91), (92)$$

де τ_I – плановий період інвесторів, а f – деяка функція, наприклад експоненціальна. Однак усі вони є неприйнятними. Величина Π_K може бути від’ємною, отже від’ємною може бути і вся права частина першої функції. Крім того, її права частина містить суму (замість різниці) статей пасивів та активів, що суперечить принципу змістовності. Недоліком другої функції є те, що при додатному прибутку знак похідної $\partial I / \partial M_K$ залежатиме від величини Π_K . Аналогічно, у третій функції знак похідної $\partial I / \partial K_{\max}$ теж залежатиме від цієї величини, що суперечить принципу однозначності.

Розглянемо тепер інвестиційну функцію, що відповідає другому диференціальному рівнянню – $I = f_I(P; M_K, P_{\min})$. Накопичений відносний прибуток P_{\min} має розмірність m/k і може розглядатися як дисконт з ринкової ціни інвестиційних товарів. Цей накопичений прибуток компенсує покупку частину ринкової ціни і чим він вищий, тим нижче його витрати і тим більше інвестиції. Відповідна інвестиційна функція матиме вигляд:

$$\tau_I (P - P_{\min}) I = M_K. \tag{93}$$

Недоліком цієї інвестиційної функції є обмеження на додатну величину прибутку ($P_{\min} < P$) та неможливість степеневих параметрів.

Третій тип інвестиційної функції $I = f_I(P; M_K, J)$ містить безрозмірний аргумент – підсумкову рентабельність J , яка може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$. Це дозволяє запровадити оціночну величину $\exp J$. Можливі дві інтерпретації цієї величини: по-перше, в якості фактору зростання вартості інвестованих коштів і, по-друге, в якості фактору дисконтування поточної ціни основних фондів. Інвестори можуть приймати рішення, або виходячи із середньої між теперішнім та майбутнім

грошовим запасом – M_K та $M_K \cdot \exp J$; або виходячи із середньої між ціною P та чистими витратами на придбання одиниці основних фондів $P \cdot \exp(-J)$. Якщо ці середні є арифметичними, то відповідні функції матимуть вигляд:

$$\tau_I PI = (1 - \gamma)M_K + \gamma M_K \cdot \exp J, \quad \tau_I I / M_K = 1 / [(1 - \gamma)P + \gamma P \cdot \exp(-J)], \quad (94), (95)$$

де γ – безрозмірна стала. За логікою зробленого припущення $\gamma < 1$. Недоліком першої функції є наявність мінімального рівня інвестицій $\tau_I PI = (1 - \gamma)M_K$, а другої – наявність максимального рівня $\tau_I I / M_K = 1 / [(1 - \gamma)P]$. Цих недоліків позбавлена інвестиційна функція із середньою геометричною:

$$[M_K \wedge (1 - \gamma)] \cdot [(M_K \exp J)^\gamma] \quad \text{або} \quad [P \wedge (1 - \gamma)] \cdot [(P \exp(-J))^\gamma]. \quad (96), (97)$$

Зрозуміло, що обидві основи інвестиційного рішення приводять до однієї і тієї ж функції:

$$\tau_I PI = M_K \exp(\gamma J). \quad (98)$$

Аналіз моделі DDGE. Розглянемо елементарну версію запропонованої моделі – за умови спільного грошового запасу макроекономічних суб'єктів. В такій моделі можна виділити три підсистеми рівнянь:

— балансові рівняння:

$$Y = C + I, \quad Y = \frac{K}{b_K} = \frac{L}{b_L}, \quad P = b_K R + b_L W. \quad (99), (100), (101)$$

— поведінкові функції:

$$\tau_C PC = M, \quad \tau_W W [L_{\max} \wedge \beta - L \wedge \beta]^\gamma (1/\beta) = M. \quad (102), (103)$$

$$\tau_I PI = M \exp(\gamma J), \quad \tau_R R [K_{\max} \wedge \alpha - K \wedge \alpha]^\gamma (1/\alpha) = M. \quad (104), (105)$$

— рівняння динаміки:

$$dK_{\max} / dt = I - hK, \quad dJ / dt = [(R - hP)K] / [PK_{\max}]. \quad (106), (107)$$

в яких величини b , h , M , α , β , γ , τ є сталими. Оскільки M вважається сталою, то рух економіки буде обмежений кривими споживчого попиту та пропозиції праці.

Продиференціюємо рівняння розподілу валового продукту та формування ціни³:

$$\begin{pmatrix} Y' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y}{\partial P} & +1 \\ -1 & \frac{\partial P}{\partial Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial K_{\max}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K'_{\max} \\ J' \end{pmatrix}, \quad (108)$$

та проаналізуємо умови довгострокової рівноваги економіки.

Першою такою умовою є нульова величина чистих інвестицій $I = hK$. В системі координат « $Y - P$ » цій умові відповідає спадна крива, що описується рівнянням

$$\tau_C (1 - hb_K) PY = M, \quad (109)$$

де, очевидно, $hb_K < 1$. Еквівалентна форма отриманого рівняння $PY = M / [\tau_C (1 - hb_K)]$ є аналогом рівняння обміну, в якому швидкість грошового обігу дорівнює $1 / [\tau_C (1 - hb_K)]$. Оскільки криві попиту задаються рівнянням

$$PY / M = [\exp(\gamma J)] / \tau_I + 1 / \tau_C, \quad (110)$$

³ $\begin{cases} P' = Y' \cdot \partial P / \partial Y + K'_{\max} \cdot \partial P / \partial K_{\max} \\ Y' = P' \cdot \partial Y / \partial P + J' \cdot \partial Y / \partial J \end{cases}$, звідки $\begin{pmatrix} \partial P / \partial Y & -1 \\ 1 & -\partial Y / \partial P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K'_{\max} \cdot \partial P / \partial K_{\max} \\ J' \cdot \partial Y / \partial J \end{pmatrix}$.

то дана крива є водночас кривою попиту при підсумковій рентабельності, що дорівнює довгостроковому значенню

$$J = J_N = \ln[(\tau_I / \tau_C) \cdot (hb_K / (1 - hb_K))] / \gamma. \tag{111}$$

Отже, дана крива може розглядатися як довгострокова крива сукупного попиту AD_N . На кривій AD_N відношення інвестицій до споживання дорівнює довгостроковому значенню

$$I / C = I_N / C_N = hb_K / (1 - hb_K). \tag{112}$$

Праворуч від кривої AD_N $J > J_N$ і, як наслідок, $I / C > I_N / C_N$, а основні фонди зростають: $K'_{max} > 0$.

Другою умовою довгострокової рівноваги є нульова величина поточного прибутку $R = hP$. Цій умові відповідає зростаюча крива, що описується рівнянням

$$\tau_w (1 - hb_K) P [(L_{max} / b_L)^\beta - Y^\beta]^{1/\beta} = b_L M. \tag{113}$$

За аналогією з попередньою кривою її можна інтерпретувати як криву довгострокової пропозиції AS_N . На цій кривій між ступенями використання ресурсів існує така залежність:

$$\tau_r hb_K [\kappa^{-\alpha} - 1]^{1/\alpha} = \tau_w (1 - hb_K) [\lambda^{-\beta} - 1]^{1/\beta}, \tag{114}$$

де $\lambda = L / L_{max}$, а $\kappa = K / K_{max}$. На кривій AS_N відношення доходів дорівнюватиме довгостроковому значенню:

$$RK / (WL) = hb_K / (1 - hb_K). \tag{115}$$

Вище кривої AS_N відношення доходів стає більшим за довгострокове значення, а підсумкова рентабельність збільшується: $J' > 0$.

Точка перетину кривих AD_N та AS_N є точкою довгострокової рівноваги (рис. 1).

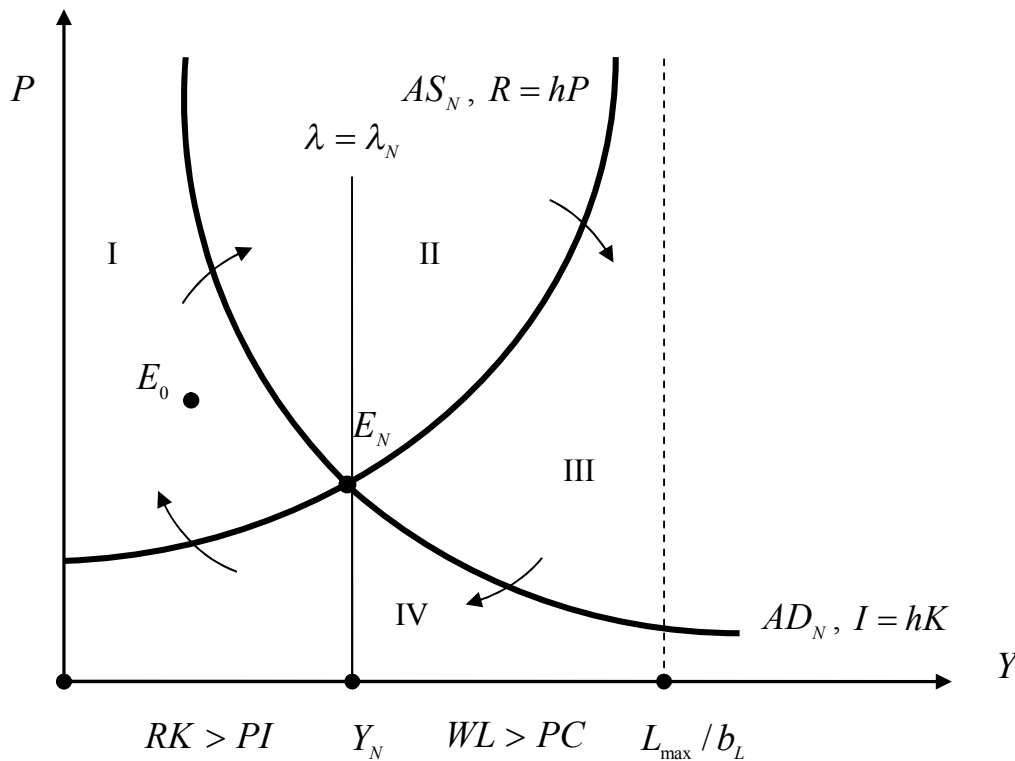


Рис. 1. Стан та динаміка основних макроекономічних величин в моделі DDGE

Визначимо динаміку рівня цін та обсягу виробництва на цих кривих. При $K'_{\max} = 0$ та $J' > 0$ відбуватиметься зростання обсягу виробництва та рівня цін – $Y' > 0$, $P' > 0$. При $J' = 0$ та $K'_{\max} > 0$ динаміка обсягу виробництва та рівня цін буде протилежною: $Y' > 0$, $P' < 0$. Це означає, що в системі координат « $Y - P$ » економіка рухається за годинниковою стрілкою.

На кривій AD_N діє ефект зміни короткострокового сукупного попиту, на кривій AS_N – короткострокової сукупної пропозиції. Довгострокові криві ділять площину на чотири сектори. У першому секторі $K'_{\max} < 0$, $J' > 0$; в другому секторі $K'_{\max} > 0$, $J' > 0$; в третьому секторі $K'_{\max} > 0$, $J' < 0$; і, нарешті, в четвертому секторі $K'_{\max} < 0$, $J' < 0$.

Отримані залежності можна пояснити наступним чином. Припустимо, що в даний момент часу економіка знаходить в точці E_0 сектору I. Короткострокові криві сукупної пропозиції та сукупного попиту підніматимуться вгору, що призводитиме в першу чергу до зростання рівня цін. У другому секторі тривале зростання рентабельності призводить до збільшення основних фондів. Короткострокова крива сукупної пропозиції починає опускатися додолу, в той час як короткострокова крива сукупного попиту продовжує зрушуватися вправо. В результаті обсяг виробництва зростатиме. В третьому секторі тривале зростання основних фондів зменшує рентабельність. Короткострокова крива сукупного попиту починає зрушуватися вліво, в той час як короткострокова крива сукупної пропозиції ще опускається додолу. Рівень цін падає. В останньому, четвертому, секторі тривале падіння рентабельності скорочує обсяг основних фондів. Короткострокова крива сукупної пропозиції починає підніматися вгору, проте короткострокова крива сукупного попиту ще буде опускатися. Обсяг виробництва скорочуватиметься. Економіка повертається до першого сектору, в якому тривале скорочення основних фондів почне збільшувати рентабельність.

Представимо макроекономічну рівність доходів та витратків у вигляді:

$$(R - hP)K - P(I - hK) = PC - WL. \quad (116)$$

В точці довгострокової рівноваги E_N чисті інвестиції та поточний прибуток дорівнюють нулю.

Отже, в цій точці бюджети обох макроекономічних суб'єктів збалансовані: $WL = PC$, $RK = PI$. Оскільки номінальні доходи та витатки макроекономічних суб'єктів прямо пропорційні грошовим запасам, то обидві рівності виконуються незалежно від рівня цін. Відповідна лінія є вертикальною прямою, що проходить через точку довгострокової рівноваги.

Частка витратків у доході домашніх господарств від'ємним чином залежить від рівня зайнятості, змінюючись від нескінченності до нуля:

$$PC / (WL) = (\tau_w / \tau_c) \cdot [\lambda^{(-\beta)} - 1]^{(1/\beta)}. \quad (117)$$

Дане відношення можна розглядати як аналог кейнсіанської середньої схильності до споживання – воно теж зменшується зі збільшенням доходу.

Загальна величина робочої сили L_{\max} є сталою, тому перевищення трудових доходів над споживчими витатками відбувається праворуч від точки довгострокової рівноваги – при $\lambda > \lambda_N$. Оскільки $WL - PC = PI - RK$, то в цій же області інвестиційні витатки будуть більшими, ніж дохід на капітал.

Рівень зайнятості на прямій $Y = Y_N$ дорівнює

$$\lambda_N = [1 + (\tau_c / \tau_w)^{\beta}]^{(-1/\beta)}. \quad (118)$$

Таким чином, чим швидше домашні господарства витратять грошовий запас і чим меншими будуть їхні вимоги щодо заробітної плати, тим вищим буде довгостроковий рівень зайнятості⁴.

⁴ Що стосується рівня завантаженості основних фондів, то на прямій $Y = Y_N$ він буде змінним, оскільки залежить від рентабельності. В точці довгострокової рівноваги E_N він дорівнюватиме

$\kappa_N = \{1 + [(\tau_c / \tau_R) \cdot (1 / (hb_K) - 1)]^{\alpha}\}^{(-1/\alpha)}$. Вище цієї точки $\kappa > \kappa_N$, нижче – $\kappa < \kappa_N$.

Для подальшого дослідження лінеаризуємо динамічну систему в точці рівноваги E_N :

Характер точки рівноваги визначається коренями характеристичного рівняння цієї системи. Визначник матриці цієї системи додатний ($\det \mathbf{A} > 0$)⁵, що виключає стан рівноваги типу сідло.

$$\begin{pmatrix} Y' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y}{\partial P} & +1 \\ -1 & \frac{\partial P}{\partial Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial K_{\max}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial K'_{\max}}{\partial Y} & \frac{\partial K'_{\max}}{\partial P} \\ \frac{\partial J'}{\partial Y} & \frac{\partial J'}{\partial P} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y - Y_N \\ P - P_N \end{pmatrix}. \quad (119)$$

Рівновага буде стійкою, якщо слід матриці є від'ємним ($\text{tr} \mathbf{A} < 0$). Це досягається за умови, що в точці E_N :

$$(b_K \partial R / \partial Y) : (b_L \partial W / \partial Y) < hb_K : (1 - hb_K)^6. \quad (120)$$

Дану умову можна представити в різних формах:

— як відношення еластичностей ставок плати за ресурси

$$\partial \ln R / \partial \ln Y < \partial \ln W / \partial \ln Y. \quad (121)$$

— як відношення ступенів використання ресурсів в точці довгострокової рівноваги E_N :

$$\kappa_N^\alpha < \lambda_N^\beta. \quad (122)$$

При $\alpha = \beta$ остання умова означатиме, що рівень зайнятості має перевищувати рівень завантаженості основних фондів.

Третя форма умови стійкості виражається через екзогенні величини:

$$\left(\frac{\tau_C}{\tau_W} \right)^\beta : \left(\frac{\tau_C}{\tau_R} \right)^\alpha < \left(\frac{1}{hb_K} - 1 \right)^\alpha. \quad (123)$$

При $\alpha = \beta$ вона спрощується і набуває вигляду:

$$\tau_R / \tau_W < 1 / (hb_K) - 1. \quad (124)$$

Отже, зменшення частки амортизації hb_K у валовому продукті зміцнює рівновагу економіки.

Аналогічний вплив матиме зменшення відношення планових періодів власників ресурсів τ_R / τ_W . Іншими словами, чим швидше інвестиційні фірми реагують на зміну завантаженості основних фондів і чим менше витрат вимагає їх відновлення, тим більший запас стійкості матиме економіка.

Траєкторії руху економіки до точки E_N можуть мати різну форму. Найбільш реалістичним випадком є періодичні коливання в економічній динаміці. Математично це означає стан рівноваги типу фокус. Такий характер рівноваги матиме, якщо дискримінант характеристичного рівняння від'ємний: $\text{tr}^2 \mathbf{A} - 4 \det \mathbf{A} < 0$. В даній моделі це еквівалентно умові

$$\gamma [hb_K (w - r)]^2 + 4hb_K (1 + w)(1 + r)(w - r) - 4(1 + r)[(1 + w)^2] < 0, \quad (125)$$

де $w = (\tau_W / \tau_C)^\beta$, а $r = \{[\tau_R / \tau_C] / [1 / (hb_K) - 1]\}^\alpha$. В системі координат « $Y - P$ » економіка рухатиметься по спіралі навколо точки довгострокової рівноваги E_N . При $w = r$ точка довгострокової рівноваги перетворюється на центр: можливі траєкторії руху економіки стають замкненими кривими.

⁵ Для цього слід визначити знаки похідних у третій матриці: $\partial K'_{\max} / \partial Y = 1 - hb_K > 0$,

$\partial K'_{\max} / \partial P = C / P > 0$, $\partial J' / \partial Y = -(b_L / b_K) \cdot (\partial W / \partial Y) \cdot K / (PK_{\max}) < 0$,

$\partial J' / \partial P = (1 / b_K - h) \cdot K / (PK_{\max}) > 0$.

⁶ Для доведення слід врахувати, що $\partial Y / \partial P = -Y / P$. Зазначимо також, що $\partial Y / \partial J = \gamma I$.

Напрямки розвитку моделі DDGE. Можливими напрямками розвитку моделі DDGE є врахування залежності норми вибуття основних фондів від їхнього віку; включення до моделі виробних фірм та власників інших ресурсів (наприклад, землі).

За наявності виробничих фірм валовий продукт буде включати не тільки споживання та інвестиції, а ще й приріст товарних запасів

$$Y_s = C + I + dQ / dt . \quad (126)$$

Виторг виробничої фірми компенсує її витрати та забезпечує приріст грошового запасу:

$$PY_D = VY_s + dM_Q / dt . \quad (127)$$

Рівняння ціни набуває вигляду

$$P = \varepsilon \cdot M_Q / Q , \quad (128)$$

де ε – безрозмірна стала.

Як й у вихідній моделі, попит на ресурси буде похідним від обсягу виробленого продукту і визначатиметься функцією Леонтьєва. Для виробничих фірм обсяг виробленого продукту виступатиме в якості інвестиції в товарний запас і тому може бути описаний функцією, подібною до інвестиційної:

де τ_Y – плановий період часу, γ_Y – безрозмірна стала, а J_Q – підсумкова рентабельність виробничих фірм, динаміка якої визначається відношенням поточного прибутку до собівартості товарного запасу:

$$\tau_Y V Y_s = M_Q \cdot \exp(\gamma_Y J_Q) \quad (129)$$

запасу:

де \bar{V} – собівартість одиниці продукту в товарному запасі. Враховуючи, що продаж частини

$$dJ_Q / dt = (P - \bar{V}) Y_D / (\bar{V} Q) \quad (130)$$

товарного запасу не змінює собівартості його одиниці, дістанемо наступне рівняння:

$$d\bar{V} / dt = (V - \bar{V}) Y_s / Q . \quad (131)$$

Запровадження величини \bar{V} дозволяє визначити вартість активів виробничої фірми суто бухгалтерським методом:

$$A_Q = M_Q + \bar{V} Q . \quad (132)$$

Якщо такий самий метод застосувати до інвестиційних фірм, дістанемо наступні рівняння:

— вартості активів

$$A_K = M_K + \bar{P} K_{\max} , \quad (133)$$

— вартості одиниці запасу основних фондів

$$d\bar{P} / dt = (P - \bar{P}) I / K_{\max} , \quad (134)$$

— підсумкової рентабельності

$$dJ_K / dt = (R - h\bar{P}) K / (\bar{P} K_{\max}) , \quad (135)$$

— інвестиційної функції

$$\tau_I P I = M_K \cdot \exp(\gamma_I J_K) . \quad (136)$$

Ще одним напрямком у розвитку запропонованої моделі є врахування перерозподілу грошової маси між макроекономічними суб'єктами. Розглянемо це докладніше. В цьому випадку поведінкові функції набувають вигляду:

$I = f_I(P, M_K, J)$, $R = f_R(M_K, K, K_{\max})$, $C = f_C(P, M_L)$, $W = f_W(M_L, L, L_{\max})$. Економіка рухатиметься у тривимірному просторі « $Y - P - M_K$ » (або « $Y - P - M_L$ »). Проекції цих траєкторій на площину « $Y - P$ » можуть мати петлі.

Врахування перерозподілу грошової маси дозволяє пояснити відому залежність між ставкою заробітної плати та рівнем безробіття, що описується кривою Філіпса. Справді, темп приросту запасу грошей у домашніх господарств можна представити у вигляді:

$$d \ln M_L / dt = (1/u - 1) / \tau_w - 1 / \tau_c, \quad (137)$$

де u – рівень безробіття. При безробітті, що менше певного рівня, грошові запаси домашніх господарств зростатимуть, а отже зростатиме і ставка заробітної плати:

$$u < 1 / (1 + \tau_w / \tau_c) \Rightarrow d \ln M_L / dt > 0 \Rightarrow \partial(d \ln W / dt) / \partial u < 0. \quad (138)$$

Другим кроком у цьому напрямку є включення до моделі позичкового ринку. Припустимо, що макроекономічні суб'єкти безпосередньо надають позики один одному. Тоді рівняння динаміки грошових запасів перетворюються на рівняння динаміки заощаджень:

$$dS_L / dt = WL - PC + iD_L, \quad dS_K / dt = RK - PI + iD_K, \quad (139)$$

де i – ставка відсотка, а D_L, D_K – «депозити» відповідно домашніх господарств та інвестиційних фірм. Їхні заощадження складатимуться із готівкових грошей та «депозитів»: $S_L = M_L + D_L, S_K = M_K + D_K$. Сума «депозитів» дорівнюватиме нулю, а сума заощаджень – готівковій масі: $D_K + D_L = 0, S_K + S_L = M$.

Позичаючи гроші один в одного, макроекономічні суб'єкти змінюють величини теперішніх та майбутніх запасів готівки. Зрозуміло, що величину майбутнього готівкового запасу вони змушені прогнозувати на основі інформації про стан та динаміку теперішнього запасу. Відповідно до гіпотези адаптивних очікувань дістанемо такі рівняння:

$$\Gamma_L + \theta_L \cdot d\Gamma_L / dt = M_L \cdot \exp\{(\theta_L / M_L) \cdot (dS_L / dt)\}, \quad (140)$$

$$\Gamma_K + \theta_K \cdot d\Gamma_K / dt = M_K \cdot \exp\{(\theta_K / M_K) \cdot (dS_K / dt)\}, \quad (141)$$

де Γ_L, Γ_K – готівкові запаси, що очікуються в майбутньому, а θ_L, θ_K – планові періоди.

Поведінка суб'єктів позичкового ринку описуватиметься симетричними функціями, які водночас є функціями пропозиції «депозитів» та попиту на кредити. Виходячи з розглянутих принципів, ці функції можна представити у вигляді:

$$i\theta_L = (\Gamma_L / M_L)^\mu \mu_L, \quad i\theta_K = (\Gamma_K / M_K)^\mu \mu_K, \quad (142)$$

де μ_L, μ_K – безрозмірні сталі.

Очевидно, що тепер в усіх поведінкових функціях потрібно враховувати не тільки теперішні, а й майбутні готівкові запаси. Виходячи з цього припущення, підставимо до поведінкових функцій середню з теперішніх запасів готівки та таких, що очікуються в майбутньому:

$$M_L \Rightarrow [M_L^\delta \delta_L] \cdot [\Gamma_L^\delta (1 - \delta_L)], \quad M_K \Rightarrow [M_K^\delta \delta_K] \cdot [\Gamma_K^\delta (1 - \delta_K)], \quad (143)$$

де δ_L, δ_K – безрозмірні сталі.

Висновки. Проведене дослідження дозволило отримати важливі теоретичні результати.

По-перше, було показано, що явне формулювання принципів макроекономічного моделювання дозволяє суттєво обмежити коло функцій, придатних для адекватного відображення поведінки макроекономічних суб'єктів. В елементарній моделі динамічної загальної рівноваги аналітична форма таких функцій визначається однозначно. На основі сформульованих принципів отримані нові функції поведінки макроекономічних суб'єктів – функції ставок плати за ресурси (заробітної та орендної плати), які в даній моделі виконують роль функцій пропозиції; інвестиційна функція з урахуванням підсумкової (за тривалий час) рентабельності основних фондів; функції попиту-пропозиції на позичковому ринку, що зв'язують ставку відсотка, теперішні та очікувані в майбутньому запаси готівки.

По-друге, дослідження продемонструвало евристичні можливості методу руху від абстрактного до конкретного. Послідовне врахування нових ендогенних чинників дозволяє отримувати впорядковану сукупність моделей динамічної загальної рівноваги.

По-третє, з'ясована роль обмеженості ресурсів (робочої сили й основних фондів) та неможливості їх повного використання. Детерміністська динамічна модель, що враховує такі властивості факторів виробництва, адекватно описує класичний середньостроковий економічний цикл з чотирма фазами. Важливим висновком проведеного дослідження є з'ясування того, що зниження витрат на відновлення основних фондів та оперативність реакції фірм на зміну їх завантаженості зміцнюють стійкість економіки.

Список використаної літератури / References

1. Bhattarai, K., Trzeciakiewicz, D. (2017) Macroeconomic impacts of fiscal policy shocks in the UK: a DSGE analysis. *Economic Modelling*, vol. 61, pp. 321–338.
2. De Giorgi, G., Gambetti, L. (2017) Business cycle fluctuations and the distribution of consumption. *Review of Economic Dynamics*, vol. 23, pp. 19–41.
3. Engler, Ph., Tervala, J. (2018) Welfare effects of TTIP in a DSGE model. *Economic Modelling*, vol. 70, pp. 230–238.
4. Forni, M., Gambetti, L., Lippi M., Sala L. (2017) Noisy news in business cycles. *American Economic Journal: Macroeconomics*, vol. 9, no. 4, pp. 122–152.
5. Gupta, R., Jun, Ma, Risse, M., Wohar, M. E. (2018) Common business cycles and volatilities in US states and MSAs: the role of economic uncertainty. *Journal of Macroeconomics*, vol. 57, pp. 317–337.
6. Hoover, K. D. (2016) The crisis in economic theory: a review essay. *Journal of Economic Literature*, vol. 54, no. 4, pp. 1350–1361.
7. Krusell, P., Mukoyama, T., Rogerson, R., Sahin, A. (2017) Gross worker flows over the business cycle. *American Economic Review*, vol. 107, no. 11, pp. 3447–3476.
8. Lambertini, L., Mendicino, C., Punzi, M. T. (2017) Expectations-driven cycles in the housing market. *Economic Modelling*, vol. 60, pp. 297–312.
9. Nalban, V. (2018) Forecasting with DSGE models: what frictions are important? *Economic Modelling*, vol. 68, pp. 190–204.
10. Parra-Alvarez, J. C. (2018) A comparison of numerical methods for the solution of continuous-time DSGE models. *Macroeconomic Dynamics*, vol. 22, issue 6, pp. 1555–1583.
11. Saint-Paul, G. (2018) The possibility of ideological bias in structural macroeconomic models. *American Economic Journal: Macroeconomics*, vol. 10, no. 1, pp. 216–241.
12. Shirota, T. (2018) What is the source of business cycles: spillovers from land prices, investment shocks, or anything else? *Journal of Macroeconomics*, vol. 57, pp. 138–149.
13. Yagihashi, T. (2018) How costly is a misspecified credit channel DSGE model in monetary policymaking? *Economic Modelling*, vol. 68, pp. 484–505.
14. Yildirim-Karaman, S. (2018) Uncertainty in financial markets and business cycles. *Economic Modelling*, vol. 68, pp. 329–339.

I. O. Zagoruiko

PRINCIPLES OF MODELING OF THE GENERAL ECONOMIC EQUILIBRIUM

This paper focuses on formulation of the principles of macroeconomic modeling and their implementation in the theory of general dynamic equilibrium. The subject of theoretical study is a closed private economy, in which two macroeconomic actors – households and investment firms – interact.

Known general scientific principles – of the analysis of dimensions, homogeneity and correspondence – are supplemented by specific principles that allow to obtain an analytical form of behavioral functions. The general properties of these functions are analyzed from the point of view of utility theory. The relationship between the equations of profit and profitability dynamics and the forms of investment function is revealed. A comparative analysis of their properties is carried out. The functions of rates of payment for resources, which take into account their limitations, are proposed.

It is shown that endogenous cyclic fluctuations arise in the classical AD – AS model, supplemented by equations of the dynamics of fixed capital and profitability. A mathematical analysis of the proposed model is carried out and its graphical interpretation is given using long-run curves of aggregate demand and aggregate supply. Indicators of the state of long-run equilibrium and the condition of its stability are determined.

The possible directions of the proposed model development are considered. In particular, it is shown that this model can include a financial market in which households and investment firms directly lend money to each other. This market can be represented using two symmetric demand-supply functions that link the interest rate, present and expected future cash reserves.

Keywords: *macroeconomic model, closed private economy, modeling methodology, dynamic general equilibrium, business cycle theory, AD – AS model, behavioral functions, macroeconomic actors, fixed capital, profitability.*