УДК:330.101.541:330.42 JEL Classification Code: C650, E230, O110, O410

І. О. Загоруйко

МЕТОДОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ОБМЕЖЕНЬ НАУКОВО-ТЕХНІЧНОГО ПРОГРЕСУ

Статтю присвячено методології макроекономічного моделювання науково-технічного прогресу з точки зору, яка є альтернативною сучасній парадигмі необмеженого потенціалу економічної ефективності.

В основу дослідження покладено загальнонауковий метод переходу від простого до складного. Як вихідний пункт обрано загальні закономірності НТП, незалежні від окремих економічних факторів. Аналіз довгострокової економічної динаміки спирається на модель обмеженого науково-технічного прогресу (LSTP-модель), що вперше запропонована в цій статті. В ході моделювання показується, що навіть за нескінченних ресурсів, спрямованих до науково-дослідного сектору, темп НТП має свою межу. В зв'язку з цим формулюється висновок, що для технологічного розвитку важливі не тільки обсяг і якість ресурсів у науково-дослідному секторі, але й тривалість їх використання.

Застосована в статті методологія реалізує загальнонауковий принцип відповідності. Показується, що: 1) класичні моделі необмеженого НТП є граничним випадком одного з пропонованих рівнянь; 2) традиційні виробничі функції є граничним випадком пропонованої виробничої функції з обмеженнями на максимальну ефективність продукту та мінімальну – факторів виробництва.

Особливістю проведеного дослідження є поліваріантний підхід – розгляд та порівняльний аналіз можливих варіантів макроекономічних функцій та рівнянь динаміки. На основі такого підходу було визначено функції та рівняння, що описують нерівномірність економічного розвитку, коливання темпів зростання ефективності та ендогенні хвилі НТП. Показується, що нові показники (потенціалу підвищення ефективності, індексу достатності фактора НТП та складені з них функції) дають змогу адекватно аналізувати усе складніші аспекти науково-технічного прогресу. Запропоновано функцію екзогенної динаміки, що відображає екзогенний вплив на НТП. Її аналіз дав можливість адекватно описати історичну динаміку різних економічних систем, що різняться балансом позитивних та негативних екзогенних чинників.

Загальні закономірності НТП моделюються за допомогою складених (у тому числі неявних) функцій. Залежно від специфіки досліджуваного процесу можуть використовуватися складені функції більш високих порядків. З математичної точки зору, представлені рівняння динаміки класифікуються як звичайні автономні диференціальні рівняння першого порядку. Такий математичний апарат дав змогу продемонструвати необхідність дотримання загальнонаукового принципу однорідності часу. Показується, що обмежений науково-технічний прогрес (на відміну від необмеженого) може бути описаний за допомогою функції корисності.

Ключові слова: *методологія макроекономічного моделювання, економічні коливання, науково-технічний прогрес, хвилі науково-технічного прогресу, виробничі функції, ефективність факторів виробництва, потенціал ефективності, диференціальні рівняння.*

Актуальність проблеми. Однією з найбільш фундаментальних частин макроекономіки є теорія економічного зростання. У свою чергу, моделювання науково-технічного прогресу, його рушійних сил та наслідків є ключовою проблемою сучасної економічної науки. Сучасне людство живе в епоху науково-технічної революції, від темпів та перспектив якої значною мірою залежить його доля. Разом з історично-географічними особливостями та чисельністю населення, рівень і темп науково-технічного розвитку визначають місце країни у світовій економіці та політиці. Будь-яка макроекономічна модель, що описує стан та динаміку національного виробництва, має спиратися на реалістичну оцінку можливого результату та темпу НТП.

Сучасною економічною парадигмою є уявлення про необмежені перспективи науки та техніки у далекому майбутньому, а отже, і відносність (тимчасовість) обмежень ефективності виробництва та темпу її підвищення. З історичної точки зору, цю парадигму слід розглядати як закономірний, але, швидше за все, минущий результат епохи бурхливого науково-технічного розвитку. Кожна з наук, що досліджує відповідну динамічну систему, врешті-решт стикається з проблемою обмежень напрямів і темпів еволюції та навіть строку її існування. В зв’язку з цим видається цілком закономірним поставити аналогічну проблему в макроекономічній теорії науково-технічного прогресу.

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій. Історично першою макроекономічною теорією розвитку була теорія екзогенного зростання. Її неокласичний варіант – модель Р. Солоу – і нині є відправною точкою для більш глибоких досліджень. Як правило, саме з неї розпочинається викладення сучасної теорії економічного зростання [1, 2, 3, 20]. У цій та похідних від неї моделях НТП визнається головною рушійною силою економічного розвитку, проте його темп вважається сталим, заданим екзогенно. В зв’язку з цим вважається, що ідея екзогенного НТП вичерпала свої теоретичні можливості. Стохастична версія моделі Солоу [22] не набула популярності.

На зміну екзогенній теорії прийшла теорія ендогенного зростання та її сучасні стохастичні версії. В цій теорії темп зростання ефективності виробництва є залежною (ендогенною) змінною, що пояснюється макро- та мікроекономічними чинниками – діяльністю науково-дослідного сектору, поведінкою фірм і домашніх господарств, політикою держави. Цілком прийнятним варіантом вважається степенева залежність темпу НТП від досягнутого рівня ефективності [20, с. 103–104]. Особливістю цієї теорії є оптимізаційний підхід до визначення темпу НТП. Так, поведінка домашніх господарств описується функцією корисності, а поведінка фірм – функцією прибутку. Ці господарські суб’єкти діють при певних обмеженнях. Залежно від того, які саме фактори включаються до цих обмежень, отримуються різноманітні моделі економічного зростання та НТП. З математичної точки зору, такі моделі є задачами варіаційного числення і стохастичного динамічного програмування.

Наведемо деякі останні та найбільш цікаві, на нашу думку, результати теорії ендогенного зростання.

Так, прихильники цієї теорії відзначають, що не варто абсолютизувати необхідність імпорту технологій менш розвиненими країнами. Виявляється, покращення кредитування поширює зовнішні ефекти від прямих іноземних інвестицій без необхідності збільшувати їхній обсяг [8]. З другого боку, більш передова технологія, що потенційно може принести більшу віддачу, потребує певного рівня розвитку країни-імпортера. В результаті для слаборозвиненої країни менш «просунуті» технології виявляються більш продуктивними [14].

З позицій теорії ендогенного зростання досліджуються різноманітні прямі та зворотні зв’язки науково-дослідного й інших секторів економіки. Результатом цих досліджень стає відкриття парадоксальних, на перший погляд, ефектів. Наприклад, на основі статистичних даних по США було зроблено висновок, що технологічна неоднорідність галузі сприяє інвестиціям у НДДКР [7]. Аналіз зворотного впливу виробничого сектору на науково-дослідний показав можливість виникнення безлічі рівноважних станів ринку, а отже, глобальну невизначеність рівноважного зростання [19]. Нестандартну інтерпретацію нещодавно отримала загальновідома проблема дефіциту природних ресурсів. Як було показано в одному з досліджень, не кожна нова технологія заощаджує ресурси, а її поява непередбачувана. З другого боку, складність прогнозування обсягу природних ресурсів може прискорювати економічне зростання та підвищувати добробут [23].

Окремо відзначимо статтю, присвячену аналізу проривних «технологій загального призначення» (ТЗП). Цю працю можна вважати концентрованим виразом теорії ендогенного зростання. Її автори спираються на декілька «стилізованих фактів»: 1) з розвитком цивілізації нові ТЗП з’являються все частіше; 2) основою нових ТЗП є поточний запас прикладних знань; 3) нові ТЗП розвиваються повільно; 4) кількість нових ТЗП з часом збільшується. Вони пропонують рівняння імовірності успіху технологічного дослідження з урахуванням обсягу та якості задіяних ресурсів. Кінцевий висновок їхнього дослідження полягає в тому, що і поява нових ТЗП, і вдосконалення проміжних продуктів в окремих секторах є стохастичним процесом [21].

З часом теорія ендогенного зростання перестала задовольняти вимоги економічної науки. XXI століття усе більше доводило необхідність пошуку більш глибоких, історичних коренів відмінностей у темпах розвитку різних країн. Як відповідь на це питання, з’явилася третя основна концепція – єдина теорія зростання. За своєю сутністю ця теорія є багатофакторною. Біогеографічні, демографічні та соціальні особливості різних народів, історія їхньої взаємодії – усе це справедливо вважається причинами нерівномірності економічного зростання в останні століття. Ключовим питанням цієї теорії є механізм переходу країн від застою до зростання, а ключовими категоріями – людський та соціальний капітал. Класичною працею, що представляє основні напрями цієї теорії, став багатотомний «Довідник з економічного зростання» [10–13].

До уваги дослідників з кожним роком потрапляють усе нові чинники економічного прогресу. Це і вплив різних форм демократії та диктатури на волатильність економічного зростання [17]; зв'язок технологічних інновацій із торговельними стратегіями країн та міжнародною міграцією кваліфікованої робочої сили [15]; деструктивні та конструктивні сторони заздрості до багатих [9]; кореляція між толерантністю до ризику та ВВП на душу населення – додатна всередині країни та від'ємна на міжнародному рівні [6]; U-подібний вплив на економічний розвиток країни її відстані до світового технологічного рубежу (найвищого в даний період рівня ефективності) у доіндустріальну та сучасну добу [18].

Згідно з цією теорією першопричинами сучасного економічного зростання є історичні та природні чинники. Зокрема, до них відносять особливості сільського господарства даної країни та країн походження мігрантів. З'ясовується, що нижчий рівень природної родючості землі у минулому сприяв більшому співробітництву, яке в сучасних умовах створює більший соціальний капітал [16]. Навпаки, більша нерівномірність розподілу прав власності на землю негативно впливала на формування людського капіталу, оскільки земельні власники не були зацікавлені у розвитку освіти або не бажали сплачувати необхідні податки [4].

Прихильники єдиної теорії зростання формулюють цікаву ідею, що відмінності сучасного стану різних країн можна пояснити двома факторами – «віком» держави та максимально досяжним рівнем розвитку, що зростає з виникненням кожної нової держави. На прикладі Давнього Єгипту, Риму, Італії, Англії та Естонії показується, як більш молоді країни можуть вчитися на досвіді старих. На думку авторів цієї ідеї, залежність сучасного рівня продуктивності країн від їх теперішнього віку має форму $\bigcap$-подібної кривої [5]. Разом з тим, історична спадщина вже зниклих країн може мати позитивний вплив навіть на сучасну технологічно передову країну. Це доводить приклад колишньої римської частини Німеччини, яка нині є більш розвиненою порівняно з іншими її регіонами [24].

Формулювання цілей статті. Як бачимо, спектр явищ, процесів та залежностей, що аналізуються в сучасній теорії економічного зростання, є величезним і все зростаючим. Разом з тим, внаслідок панівної тенденції до поглибленого дослідження окремих нюансів економічного розвитку поза увагою науковців залишилися доволі прості, але, на думку автора, принципові питання:

1. Чи може ефективність будь-якого фактора виробництва та економіки в цілому зростати до нескінченності?
2. Чи існують мінімальні рівні факторів НТП та виробництва, нижче яких їхній вплив дорівнюватиме нулю?
3. Чи існують суто детерміністські закономірності в динаміці ефективності, що не залежать від випадкових обставин та конкретних факторів НТП?
4. Чи можна усі різноманітні фактори економічного зростання та НТП описати єдиною макроекономічною функцією, подібною до виробничої?
5. Чому ефективність моделюється за допомогою диференціального рівняння, а не статичної функції, як, наприклад, обсяги виробництва, попиту та пропозиції? Яким може і яким не може бути таке диференціальне рівняння?

Відповідям на ці елементарні питання присвячена ця стаття.

На думку автора, гіпотеза необмеженості технічного розвитку видається надто оптимістичною. На макрорівні усі відомі природні процеси мають певні обмеження по швидкості та ефективності, тому логічно припустити, що й технологічні процеси та якість продукту (як їхній результат) теж підлягають певним обмеженням. Разом з тим, з гіпотези обмеженості науково-технічного прогресу зовсім не випливає висновок про його майбутнє припинення. Навпаки, економіка може нескінченно довго наближатися до межі ефективності. Дуже імовірно, що людство ще далеке від цієї межі, внаслідок чого гальмування темпу НТП у масштабі всієї світової економіки ще не стало помітним. Однак апріорі таку перспективу виключати не можна.

Методи та порядок дослідження. Елементарність поставлених питань і детерміністський підхід до їх розв'язання зумовили простоту математичного апарату. В статті використано елементарні неявні та складені функції, автономні диференціальні рівняння першого порядку. Їх дослідження здійснювалося із застосуванням класичного математичного аналізу та геометрії плоских кривих. За необхідності здійснювався перехід до більш інформативної системи координат або до спільного використання двох таких систем.

Пропонована стаття реалізує загальнонаукові методи дослідження:

– метод переходу від простого до складного;

– принцип відповідності, згідно з яким моделі, що описують вужче коло процесів та явищ, мають бути окремим випадком більш загальної моделі;

– принцип розмірності, згідно з яким алгебраїчні доданки повинні мати однакову розмірність, а аргументи усіх, крім степеневих, функцій мають бути безрозмірними;

– поліваріантний підхід.

Гіпотеза обмеженості науково-технічного прогресу визначила порядок цього дослідження. Воно розпочинається із визначення НТП як неявної функції багатьох змінних. На першому етапі дослідження припускається, що усі її аргументи, крім часу та ефективності, є сталими. Такий підхід дав можливість, по-перше, обґрунтувати закономірність диференціального характеру моделі ефективності, а по-друге, з'ясувати її форму. Далі послідовно вводяться такі поняття, як потенціал підвищення ефективності та функція від нього. На наступному етапі демонструються можливості детерміністського моделювання нерівномірності НТП – нескінченно повторюваних хвиль (осциляцій) та ациклічних екзогенних коливань (флуктуацій). На третьому етапі дослідження вводиться поняття індексу достатності факторів, що стимулюють НТП, та функції від цього індексу. На заключному етапі вводиться поняття ефективності продукту та розглядається її зв'язок із продуктивністю основних фондів.

Виробничі функції та функція НТП. Головною складовою моделі науково-технічного прогресу, що визначає її сутність, є рівняння динаміки ефективності факторів виробництва. Математично ефективність праці (L) та капіталу (K) виражається у вигляді коефіцієнтів a_L та a_K . Для подальшого аналізу принциповим є з'ясування розмірності цих коефіцієнтів. Вона визначається формою відповідної виробничої функції. У найпростішій з них – функції Леонтьєва – цей зв'язок очевидний. Дійсно, у цій функції

$$Y = a_K K = a_L L \,, \tag{1}$$

ліва частина – обсяг виробництва Y – має розмірність q/t, де q (*quantity*) – продукт, а t – час. У правій частині фактори виробництва мають розмірності відповідно k та l – капітал та праця. Для того щоб зміна одиниць вимірювання факторів та обсягу виробництва не впливала на цю функцію, коефіцієнт a_K повинен мати розмірність $q/(kt)$, а коефіцієнт a_L – $q/(lt)$, тобто являти собою продуктивність капіталу (фондовіддачу) і продуктивність праці. Лише в цьому випадку пропорційна зміна одиниць вимірювання факторів виробництва буде компенсуватися обернено пропорційною зміною коефіцієнтів ефективності. Це ж стосується зміни одиниць вимірювання продукту q та часу t . Отже, в лінійно однорідній виробничій функції, якою є функція Леонтьєва, коефіцієнти ефективності мають бути однорідними функціями степеня -1 відносно власних одиниць вимірювання. З другого боку, лише така розмірність коефіцієнтів ефективності має економічний зміст. Звідси випливає, що між факторами та обсягом випуску може існувати лише прямо пропорційний зв'язок, який виражає сталий ефект масштабу виробництва.

На основі цього аналізу можна визначити коректні форми трьох інших відомих функцій – з абсолютно замінюваними факторами, CES-функції та функції Коба-Дугласа:

$$Y^{\rho} = (a_K K)^{\rho} + (a_L L)^{\rho}\,,\; Y^{-\rho} = (a_K K)^{-\rho} + (a_L L)^{-\rho}\,,\; Y = (a_K K)^{\alpha}(a_L L)^{1-\alpha}\,, \qquad (2)\,(3)\,(4)$$

де ρ – безрозмірна стала, α – параметр, який за своїм змістом є еластичністю випуску. На жаль, стосовно функції Коба-Дугласа склалася традиція розглядати лише ефективність праці, що некоректно з точки зору принципу розмірності. У загальному випадку кожен з коефіцієнтів a_K та a_L (або обернені до них коефіцієнти ресурсомісткості b_K , b_L) змінюється з власним темпом і тому не може бути виключений з виробничої функції.

Розглянемо тепер функцію науково-технічного прогресу. Нехай a – рівень загальної ефективності, що дорівнює відношенню обсягу випуску за одиницю часу до загального обсягу ресурсів в економіці. На його величину впливають як ресурси, що задіяні в науково-дослідному секторі, так і загальний обсяг ресурсів в економіці. Цей вплив, як вже відзначалося, аналізується теорією ендогенного економічного зростання. Проте для зростання економіки та її ефективності мають значення не тільки кількість і якість задіяних ресурсів, але й тривалість їхнього використання. Саме цей аспект є предметом теорії екзогенного зростання. Якщо ресурси, що стимулюють науково-технічний прогрес, не змінюються, то єдиним, але невпинним стимулом стає час. Такий НТП є екзогенним фактором для «решти» економіки, але відносно самого себе він є ендогенним процесом. Тому є логічним саме його зробити вихідним пунктом цього дослідження.

У найбільш загальному вигляді функцію НТП можна представити як неявну функцію багатьох змінних – ефективності, факторів (стимулів) НТП та часу:

$$\Phi(a,t,Z_1,Z_2,...Z_m)=0, \qquad Z_1,Z_2,...Z_m=const \qquad \Rightarrow \Phi(a,t)=0, \tag{5) (6}$$

де $Z_1,Z_2,...Z_m$ – фактори НТП. Припустимо тепер, що ці фактори є сталими, і розглянемо відповідну функцію НТП. Як і у випадку виробничих функцій, з'ясуємо, яким саме перетворенням вона може (і має) підлягати. Першим таким перетворенням є зміна моменту відліку часу. Воно змінює усі моменти часу на одну і ту ж величину Δt. Оскільки ця формальна процедура ніяк не впливає на поточну, минулу та майбутню ефективність, то і значення функції $\Phi(a,t)$ у будь-який момент не повинно змінитися. Це можливо лише, якщо її аргументом безпосередньо є не момент часу, а різниця моментів – період часу:

$$\Phi(a, f(t))=0, \qquad f(t)=t-t_0 \;\Rightarrow \qquad (t+\Delta t)-(t_0+\Delta t)=t-t_0, \tag{7) (8) (9}$$

де t, t_0 – поточний і довільно обраний моменти часу. Як би не змінювався момент відліку часу, на тривалість періоду $t-t_0$ це не впливатиме. Для того щоб зміна масштабу часу теж не впливала на значення функції, необхідно перейти від абсолютної величини періоду часу до відносної, обравши за базу порівняння сталий період часу θ: $f(t)=(t-t_0)/\theta$. Звідси випливають інші властивості функції НТП: по-перше, вона теж має бути безрозмірною, а по-друге, в момент часу $t=t_0$ ефективність має дорівнювати a_0. Ці умови виконуються, лише якщо функція НТП буде алгебраїчною сумою функції часу та різниці значень безрозмірної функції ефективності:

$$\Phi(a,t)=[F(a/a*)-F(a_0/a*)]-(t-t_0)/\theta=0 \;\Rightarrow, \tag{10}$$

$$F(a/a*)-F(a_0/a*)=(t-t_0)/\theta, \tag{11}$$

де $a*$ – стала з розмірністю a, що може розглядатися як база для порівняння з поточною ефективністю, $F(a/a*)$ – функція ефективності.

Таким чином, на відміну від виробничих функцій, що були розглянуті вище, визначити величину функції ефективності без початкових умов неможливо. Ця властивість є наслідком відносності моменту відліку часу. Нульовий момент – це умовність, у той час як нульовий обсяг ресурсів – ні. На відміну від моменту часу, величину ресурсів та обсяг випуску не можна змінити шляхом їхнього «перенумерування». З математичної точки зору, це означає, що закон зміни ефективності повинен мати форму автономного диференціального рівняння першого порядку:

$$dF(a)/dt=1/\theta. \tag{12}$$

Відсутність часу у правій частині отриманого рівняння означає, що воно справедливе для будь-якого моменту.

Розглянемо, якою саме має бути функція ефективності $F(a)$. Оскільки за своєю сутністю НТП – це процес підвищення ефективності, то така функція має бути монотонно зростаючою:

$$dF(a)/da\cdot da/dt=1/\theta>0, \qquad da/dt>0 \qquad \Rightarrow \; dF(a)/da>0. \tag{13}$$

Найпростішою є функція ефективності, графік якої не має точок перегину, а друга похідна, відповідно, не змінює знак. Тоді можливі такі варіанти – лінійна функція; опукла функція, при якій ефективність зростає все повільніше і повільніше; вгнута функція, при якій ефективність зростає все швидше і швидше.

Представимо відповідну функцію НТП у системі координат $t0a$. Чотири з п'яти її можливих варіантів зображено на рисунку 1. Як показує ця геометрична інтерпретація, графік лінійної функції Φ_2 перетинає вісь абсцис. Це означає, що ефективність нескінченно довго дорівнювала нулю, а потім раптово розпочався процес її підвищення. Такий висновок є неприйнятним з історичної точки зору. Відповідно до цього критерію лінійна функція має бути виключена. Крива Φ_1 є опуклою, а крива Φ_3 – вгнутою. Крива Φ_1 відображає форму графіків логарифмічної функції та степеневих функцій $a(t)$ з додатним показником степеня, меншим одиниці (типу верхньої вітки «горизонтальної» параболи). Крива Φ_3 відображає форму графіків степеневих функцій $a(t)$ з показником степеня, більшим за одиницю (типу правої вітки «вертикальної» параболи). Вони теж перетинають вісь абсцис, а отже, є неприйнятними. Крива Φ_4 відображає графіки степеневих функцій $a(t)$ з від'ємним показником степеня (типу гіперболи). Вона не перетинає вісь абсцис, проте має вертикальну асимптоту. Таким чином, ліва вітка такої кривої описуватиме вибуховий, у прямому сенсі, процес – з наближенням до особливого моменту ефективність зростатиме до нескінченності. З економічної точки зору, це означає існування особливого моменту часу, в який науково-технічний прогрес завершується, а ефективність сягає нескінченності. Така перспектива абсурдна, що виключає і цю функцію.

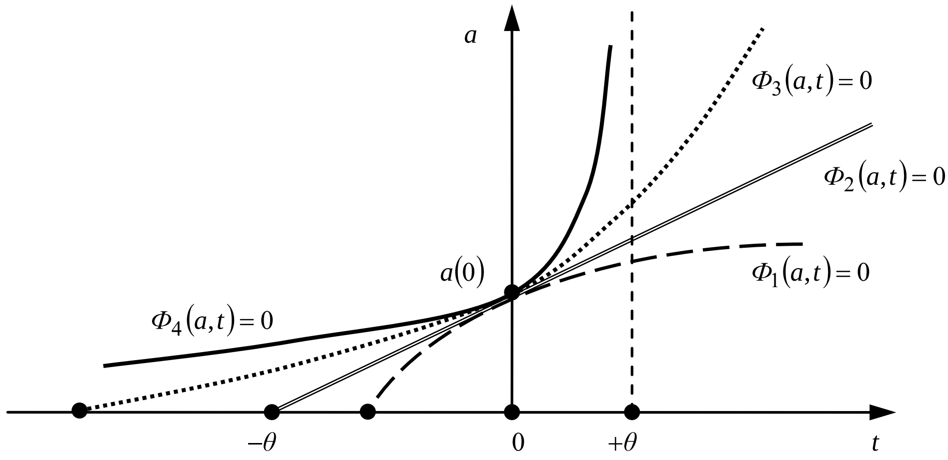

Рисунок 1 – Динаміка ефективності за умови її залежності від поточної величини
Зображений випадок, коли $a(0)=a*$. Показані частини траєкторій при $a>0$

Усі чотири степеневі функції описуються одним диференціальним рівнянням, в якому приріст ефективності залежить від її поточної величини:

$$da/dt = a*^{1-\chi}\, a^{\chi}\theta^{-1}, \tag{14}$$

де χ – безрозмірна стала, яка може бути як додатною, так і від'ємною. Розв'язком цього рівняння є функція

$$a^{1-\chi}/(1-\chi)=a(0)^{1-\chi}/(1-\chi)+ta*^{1-\chi}\theta^{-1}, \quad \chi\neq 1, \tag{15}$$

де $a(0)$ – ефективність у початковий момент часу. При $\chi<0$ графіком розв'язку буде крива Φ_1, при $\chi=0$ – Φ_2, при $0<\chi<1$ – Φ_3, а при $\chi>1$ – Φ_4.

Таким чином, залишається єдино можливий варіант елементарної функції $F(a)$, що не має точки перегину – при значенні параметра $\chi=1$. Цьому значенню χ відповідає відоме рівняння сталого темпу приросту ефективності (сталого темпу НТП):

$$da/dt = va \qquad \Rightarrow \qquad d\ln a/dt = v, \tag{16}$$

де v – стала, що має розмірність $1/t$ і визначає, на скільки відсотків зростає ефективність за одиницю часу. Розв'язком цього рівняння є експоненціальна функція

$$a(t)=a(t_0)\cdot\exp[v(t-t_0)], \tag{17}$$

де t_0 – довільний момент часу, обраний для порівняння, $a(t_0)$ – ефективність в цей обраний момент, з якою порівнюється поточна ефективність. Ця функція визначена для будь-якого моменту часу та набуває тільки додатних значень. З економічної точки зору, це означає, що в такій моделі НТП не має ані початку, ані кінця і є неперервним процесом.

Функція корисності НТП. Розглянемо модель необмеженого НТП з позиції теорії корисності. Введемо функцію корисності НТП, аргументом якої є темп приросту ефективності:

$$U=U(d\ln a/dt). \tag{18}$$

Темп приросту ефективності є відношенням її приросту (похідної) до поточного рівня ефективності: $d\ln a/dt = a'/a$. Суспільство зацікавлене як у збільшенні приросту ефективності a', так і в більшому рівні поточної ефективності a. Перше прагнення виражає динамічну, «революційну» схильність суспільства, друге – статичну, «консервативну». Проте в моделі з необмеженим результатом НТП ($t \to +\infty \;\Rightarrow\; a \to \infty$) ці два прагнення несумісні. Дійсно, граничні корисності складових цього темпу матимуть вигляд:

$$U = U(\ln' a) \;\Rightarrow \tag{19}$$

$$\partial U / \partial a' = a^{-1} \cdot dU / d\ln' a \qquad \partial U / \partial a = -a' \cdot a^{-2} \cdot dU / d\ln' a \qquad (20)\ (21)$$

Яким би не був знак граничної корисності темпу приросту $dU / d\ln' a$, граничні корисності $\partial U / \partial a'$ та $\partial U / \partial a$ матимуть протилежні знаки у випадку прогресу ($a' > 0$). Так, якщо вважати, що гранична корисність темпу приросту додатна (що цілком логічно), то гранична корисність самої ефективності буде від'ємною, що є абсурдним. З точки зору теорії корисності, такий парадокс є результатом припущення про можливість необмежного підвищення ефективності. Якщо якесь благо є безмежним (хоча б і за надвеликий період часу), то воно не є економічним і не має корисності.

Цей парадокс можна розв'язати, якщо відмовитися від традиційного уявлення про можливість необмеженого підвищення ефективності. Введемо поняття потенціалу підвищення ефективності:

$$p = (a_{\max} - a)/a, \tag{22}$$

де p – потенціал підвищення ефективності факторів виробництва; a, $a_{\max}$ – поточний та максимально можливий рівень ефективності. Економічний зміст потенціалу ефективності очевидний – він показує, на скільки відсотків може максимально збільшитися ефективність порівняно з досягнутим рівнем. Потенціал змінюється у протилежному напрямку до ефективності і, на відміну від неї, – від нуля нескінченності:

$$dp / da < 0; \qquad a \to a_{\max} \Rightarrow p \to 0; \qquad a \to 0 \Rightarrow p \to \infty. \qquad (23)\ (24)\ (25)$$

Розглянемо функцію корисності, аргументом якої є темп приросту потенціалу ефективності. Відповідні граничні корисності дорівнюватимуть:

$$\partial U / \partial p' = p^{-1} \cdot dU / d\ln' p, \qquad \partial U / \partial p = -p' \cdot p^{-2} \cdot dU / d\ln' p. \qquad (26)\ (27)$$

Логічно вважати, що гранична корисність темпу приросту потенціалу від'ємна. Звідси дістанемо економічно змістовні знаки граничних корисностей його складових:

$$dU / d\ln' p < 0, \qquad p' < 0 \qquad \Rightarrow \qquad (28)\ (29)$$

$$\partial U / \partial p' = p^{-1} \cdot dU / d\ln' p < 0, \qquad \partial U / \partial p = -p' \cdot p^{-2} \cdot dU / d\ln' p < 0. \qquad (30)\ (31)$$

Перша нерівність означає, що суспільство зацікавлене у швидшому використанні потенціалу, що еквівалентне підвищенню ефективності. Друга нерівність означає, що суспільство зацікавлене краще використовувати поточний потенціал, а отже, мати більш високу ефективність.

Аналогом рівняння сталого темпу НТП буде рівняння сталого темпу скорочення потенціалу з аналогічним розв'язком:

$$d\ln p / dt = -v \qquad \Rightarrow \qquad p(t) = p(t_0) \cdot \exp[-v(t - t_0)]. \qquad (32)\ (33)$$

Графіки потенціалу та ефективності як функцій часу зображені на рисунку 2.

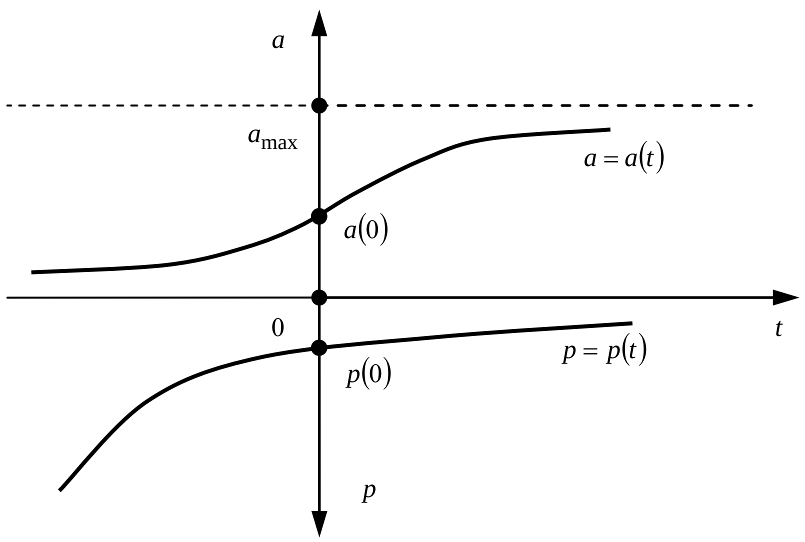

Рисунок 2 – Ефективність a та потенціал p як функції часу в моделі обмеженого науково-технічного прогресу

Виразимо отриманий розв'язок через величину ефективності, обравши момент t_0 за нуль:

$$a_{\max}/a(t)-1=[a_{\max}/a(0)-1]\cdot\exp(-vt)\;\Rightarrow \tag{34}$$

$$a(t)^{-1}=a(0)^{-1}\cdot\exp(-vt)+a_{\max}^{-1}\cdot[1-\exp(-vt)]. \tag{35}$$

Для виробничої функції коефіцієнт ефективності a – це продуктивність фактора виробництва, тож обернений до нього коефіцієнт є ресурсомісткістю b. Зробивши таку заміну, дістанемо

$$b(t)=b(0)\cdot\exp(-vt)+b_{\min}\cdot[1-\exp(-vt)]. \tag{36}$$

Це рівняння показує, що в моделі обмеженого НТП поточна величина ресурсомісткості є середньою арифметичною початкової та мінімальної величин. В моделі необмеженого НТП максимальної ефективності не існує. Математично це означає, що в ній $a_{\max}=\infty$, $b_{\min}=0$ і, відповідно, $b(t)=b(0)\cdot\exp(-vt)$. Гіпотеза про можливість нульової ресурсомісткості створює дивне (з економічної точки зору) уявлення, що брак часу – це єдине обмеження для науково-технічного прогресу. З другого боку, цю ситуацію можна розглядати як граничний випадок пропонованої моделі обмеженого НТП. Це реалізує загальнонауковий принцип відповідності, згідно з яким моделі, що описують вужче коло процесів та явищ, мають бути окремим випадком більш загальної моделі.

Представимо далі рівняння обмеженого НТП у вигляді

$$1/\ln' p=-1/v. \tag{37}$$

Тоді ліву частину можна інтерпретувати як функцію корисності, а праву – як її значення при даному темпі приросту потенціалу. Перші частинні похідні цієї функції є граничними корисностями потенціалу та швидкості його зміни:

$$U=1/\ln' p\;\Rightarrow\qquad \partial U/\partial p=1/p'<0,\qquad \partial U/\partial p'=-p/p'^2<0. \qquad (38)\ (39)\ (40)$$

При падінні швидкості зміни потенціалу до нуля її гранична корисність та значення функції стають нескінченними:

$$p'\to 0\;\Rightarrow\qquad \partial U/\partial p'\to-\infty,\qquad U\to-\infty. \tag{41}$$

З економічної точки зору, це означає неприйнятність припинення НТП.

Функції потенціалу і темп НТП. Критерієм прийнятності рівняння обмеженого НТП є висновок щодо його темпу. З'ясуємо це, скориставшись коефіцієнтами еластичності. Визначимо коефіцієнт еластичності потенціалу відносно ефективності та виразимо його через сам потенціал:

$$\mathrm{E}p(a)=\left[-a_{\max}/a^2\right]/[(a_{\max}/a-1)/a]=-(1+p)/p, \tag{42}$$

де $\mathrm{E}p(a)$ – коефіцієнт еластичності потенціалу відносно ефективності. Виразимо темп приросту ефективності (темп НТП) через цей коефіцієнт:

$$\ln' p=\mathrm{E}p(a)\cdot\ln' a\;\Rightarrow\;\ln' a=\ln' p\cdot\mathrm{E}^{-1}p(a)\;\Rightarrow\;\ln' a/v=p/(1+p), \qquad (43)\ (44)\ (45)$$

де $\ln' a/v$ – нормований темп НТП. Як бачимо, темп НТП в цьому рівнянні є нульовим при нульовому потенціалі, що логічно для моделі з межею для підвищення ефективності. Проте для нескінченного потенціалу це рівняння дає недостовірний результат про додатний, а отже, максимальний темп НТП:

$$p\to 0\;\Rightarrow\;\ln' a/v\to 0,\qquad p\to\infty\;\Rightarrow\;\ln' a/v\to 1. \qquad (46)\ (47)$$

Таким чином, рівняння, в якому темп НТП визначається безпосередньо темпом скорочення потенціалу ефективності, є надто спрощеним.

Враховуючи це, введемо функцію від потенціалу ефективності, що має такі ж властивості, що і сам потенціал:

$$V=V(p),\qquad dV/dp>0,\qquad V(0)=0,\qquad V(\infty)=\infty. \qquad (48)\ (49)\ (50)\ (51)$$

Завдяки цим властивостям рівняння динаміки НТП стає інваріантним до зміни залежної змінної. В результаті дістанемо рівняння темпу скорочення функції $V(p)$:

$$d\ln V(p)/dt=-v. \tag{52}$$

Виразимо темп приросту ефективності (темп НТП) через еластичність цієї функції:

$$\ln' V=\mathrm{E}V(p)\cdot\mathrm{E}p(a)\cdot\ln' a\;\Rightarrow\;\ln' a=\ln' V\cdot\mathrm{E}^{-1}V(p)\cdot\mathrm{E}^{-1}p(a). \qquad (53)\ (54)$$

Логічно вважати, що стан $a=a_{\max}$ ($p=0$, $V(p)=0$) досягається у нескінченно далекому майбутньому, а стан $a=0$ ($p=\infty$, $V(\infty)=\infty$) – у нескінченно далекому минулому. В обох цих станах темп НТП буде нульовий за умови, що $\ln' V$ скінченний, а обернений добуток еластичностей – нульовий.

Теоретично, можливі три елементарні функції потенціалу ефективності – логарифмічна, степенева та показникова:

$$V_{\log} = \ln(1+\lambda p), \quad V_{\mathrm{pow}} = (1+p)^{\lambda} - 1, \quad V_{\exp} = e^{\lambda p} - 1, \qquad (55)\ (56)\ (57)$$

де λ – безрозмірна стала. При нульовому значенні цього параметра функції обертаються на нуль. При $\lambda = 1$ степенева функція перетворюється на сам потенціал ефективності. Еластичності цих функцій відносно потенціалу ефективності дорівнюють відповідно:

$$\mathrm{E}V(p) = \lambda p(1+\lambda p)^{-1} \ln^{-1}(1+\lambda p), \tag{58}$$

$$\mathrm{E}V(p) = \lambda p(1+p)^{-1}\left[1-(1+p)^{-\lambda}\right]^{-1}, \tag{59}$$

$$\mathrm{E}V(p) = \lambda p\left(1-e^{-\lambda p}\right)^{-1}. \tag{60}$$

Усі три функції від потенціалу ефективності зображено на рисунку 3.

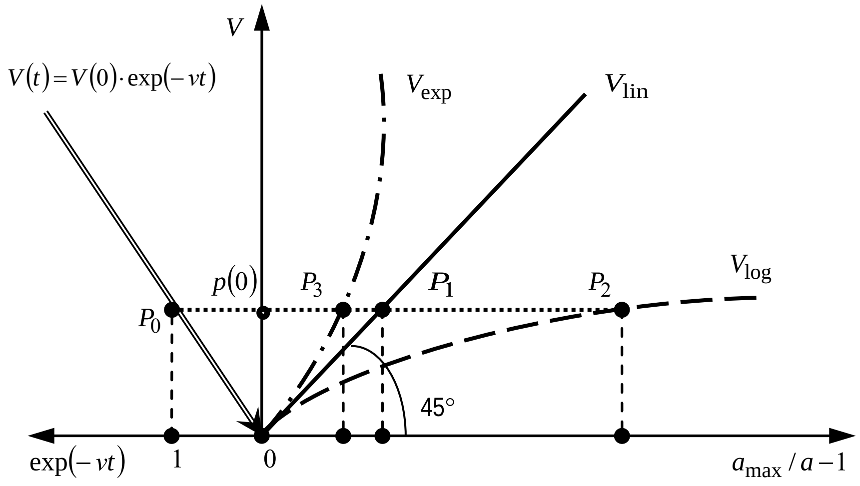

Рисунок 3 – Функції від потенціалу ефективності

Показаний випадок, коли $\lambda = 1$. $V_{\mathrm{lin}} = a_{\max}/a - 1$, $V_{\log} = \ln(1+p)$, $V_{\exp} = \exp p - 1$. Початок координат – точка нескінченно далекого майбутнього і, відповідно, нульового потенціалу, коли усі можливості підвищення ефективності вичерпано

В усіх трьох функціях темп НТП у «кінцевому» стані буде нульовий. Проте лише показникова функція створює ефект нульового темпу для «початкового» стану. Степенева функція призводить до скінченного темпу НТП у цьому стані, а логарифмічна – взагалі до нескінченного.

Таким чином, показникова функція від потенціалу ефективності є єдиною, що створює ефект нульового темпу НТП як у нескінченно далекому майбутньому, так і в минулому. Звідси рівняння темпу НТП, виражене через потенціал ефективності, матиме вигляд:

$$d\ln a/dt = \nu\left(1-e^{-\lambda p}\right)/(1+p). \tag{61}$$

Проаналізуємо отримане рівняння динаміки. (Для спрощення обмежимося випадком, коли $\lambda = 1$).

Як випливає з його форми, в часовому інтервалі $(0,\infty)$ поточну величину функції $\exp p(t)$ (як і самого потенціалу) можна представити як середню її межі та початкової величини:

$$\exp p(t) = \exp p\big|_{t=0} + (1-T)\exp p\big|_{t=\infty}, \tag{62}$$

де $T = \exp(-\nu t)$.

Представимо нормований темп НТП як функцію потенціалу ефективності:

$$\ln' a/\nu = f_{\exp} = \left(1-e^{-p}\right)/(1+p). \tag{63}$$

Графік цієї функції зображено на рисунку 4.

Аналогічну форму матиме крива темпу НТП для показникової функції другого порядку:

$$V_{\exp}^{\circ\circ} = \exp\left(V_{\exp}^{\circ}\right) - 1, \qquad \text{де} \quad V_{\exp}^{\circ} = e^{p} - 1. \tag{64}$$

Як бачимо, крива темпу НТП має форму «мегахвилі», що починається у нескінченно далекому минулому та завершується у нескінченно далекому майбутньому. Другу частину висхідної ділянки кривої – від точки перегину до точки максимуму – можна інтерпретувати як добу науково-технічної революції.

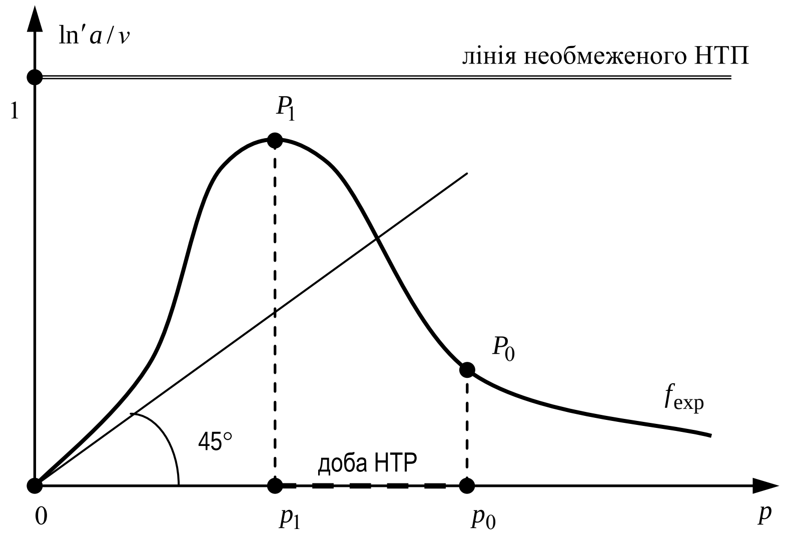

Рисунок 4 – Крива нормованого темпу НТП для показникової функції потенціалу:
$f_{\exp} = \left(1 - e^{-p}\right) / (1 + p)$, де $p = \left(a_{\max} - a\right) / a$. Відрізок $p_0 - p_1$ – доба НТР

З точки зору теорії продуктивності, таку форму кривої темпу НТП можна інтерпретувати наступним чином. Щоб досягнути цього рівня розвитку, економічна система має пройти певний шлях, поступово підвищуючи величину ефективності. Характеристикою цього шляху є інтегральна величина «освоєного потенціалу» Π. Цю інтегральну величину визначимо як функцію поточного потенціалу:

$$\Pi = e^{-p} \Pi_{\max}, \tag{65}$$

де $\Pi_{\max}$ – максимально можлива (кінцева) величина освоєного потенціалу, а множник e^{-p} – його фактично освоєна частка:

$$e^{-p} = \Pi / \Pi_{\max}. \tag{66}$$

Коли $p = \infty$, економічна система знаходиться на початку свого розвитку, і освоєний потенціал дорівнює нулю. Навпаки, коли $p \to 0$, система завершує свій розвиток, і освоєний потенціал наближається до максимального. Інтегральна сума освоєних часток дорівнює одиниці:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-p} dp = 1. \tag{67}$$

Різницю $1 - e^{-p}$ можна інтерпретувати як частку $\Pi_{\max}$, яку ще можна освоїти. Нормований темп НТП є добутком цієї частки та нормованої величини ефективності:

$$\ln' a / v = \left(1 - e^{-p}\right) \cdot \left(a / a_{\max}\right). \tag{68}$$

На ранньому етапі розвитку (правій ділянці кривої) ефективність дуже низька, а потенціал її підвищення – дуже великий. В результаті частка освоєного потенціалу змінюватиметься мало, і переважатиме ефект зменшення самого потенціалу, тобто підвищення рівня ефективності. На пізньому етапі розвитку вплив цих співмножників буде протилежним, в результаті чого темп НТП почне спадати. Цю залежність можна інтерпретувати як закон спадної віддачі часу, а саме: зі збільшенням величини часу його «продуктивність» як фактора НТП зменшується.

Звернемося тепер до системи координат $p0V$. При $\lambda = 1$ графік функції $V_{\exp}$, як вже було показано, є монотонно зростаючою вгнутою функцією. Параметр λ не змінює знаку її першої та другої похідних, однак деформує графік функції по вертикалі. В результаті при $\lambda < 1$ її крива перетинатиме бісектрису. З економічної точки зору, це означає виникнення ефекту «двофазного» розвитку, коли система переходить від фази випередження лінійного шляху до фази запізнення.

З математичної точки зору, включення до функції $V_{\exp}$ параметра λ принципово не змінює її поведінки. Її рівняння можна розв'язати відносно потенціалу, отримавши функцію $p(t)$. Оскільки потенціал ефективності, у свою чергу, є розв'язною функцією відносно ефективності, то й саму ефективність можна виразити як явну функцію часу.

Наступним кроком є перехід до показникової функції, яка вже не може бути перетворена на явну функцію $p(V)$. Для цього слід в її рівнянні замінити одиницю на функцію, що набуває одиничного значення при нульовому потенціалі та не порушує монотонності функції:

$$V^{\bullet}_{\exp} = e^{\lambda p} - e^{-\mu p}. \tag{69}$$

де μ – безрозмірна стала, а $V^{\bullet}_{\exp}$ – «нерозв'язна» показникова функція. Як і в попередньої функції, кут нахилу графіка $V^{\bullet}_{\exp}(p)$ в початку координат може відхилятися від 45°. Проте включення другого параметра приводить до якісних змін: при певних значеннях параметрів λ та μ графік функції $V^{\bullet}_{\exp}(p)$ двічі перетинатиме бісектрису. Цей випадок зображено на рисунку 5.

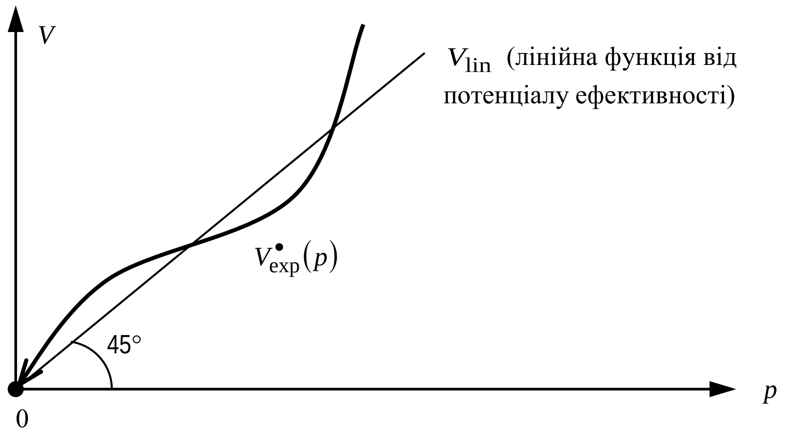

Рисунок 5 – «Нерозв'язна» показникова функція потенціалу ефективності:

$$V^{\bullet}_{\exp} = e^{\lambda p} - e^{-\mu p},\ \mu > \lambda,\ \lambda + \mu > 1$$

З економічної точки зору, це означає, що порівняно з лінійним шляхом розвитку $V(p) = p$ економічна система буде послідовно проходити фази випередження, запізнення і знову випередження. На двох останніх фазах функцію V_{lin} можна розглядати як своєрідний лінійний «тренд» для НТП, що описується функцією $V^{\bullet}_{\exp}(p)$. Разом з тим, на нескінченності розбіжність між двома траєкторіями необмежено зростає, що означає відсутність справжньої залежності. Для того щоб деяка функція була справжнім трендом, необхідно, щоб фактична траєкторія НТП на нескінченності повторювала форму графіка цієї функції, була б йому «паралельною».

Ендогенні хвилі НТП. Існують різноманітні чинники, які можуть призводити до справжніх коливань траєкторії НТП навколо деякого тренду. Такими чинниками є, по-перше, обсяг та якість ресурсів, задіяних у науково-дослідному секторі. По-друге, це можуть бути соціальні, політичні та навіть природні чинники.

Однак є й такі коливання, що визначаються нерівномірністю самого НТП і не залежать від чинників, екзогенних відносно нього. Очевидно, що навіть найталановитіші вчені та інженери, які працюють у найкращих умовах, не можуть «перестрибнути» через певні етапи науково-технічного прогресу. Образно кажучи, не можна створити комп'ютер раніше калькулятора, а алгебру – до арифметики. Історія розвитку техніки знає багато прикладів того, як сміливі конструкторські ідеї не могли бути реалізовані саме не через брак коштів, людських чи матеріальних ресурсів, а через недостатній рівень технології, яка, в свою чергу, була детермінована конструктивними властивостями існуючої техніки. Зрозуміло, що були й будуть приклади обмежень на впровадження нових технологій з боку конструкцій існуючої техніки. Це задає неперервні циклічні коливання. В сучасних умовах до цього додаються обмеження з боку інформаційних технологій – збирання, передачі та обробки даних, створення штучного інтелекту. Таким чином, послідовність наукових відкриттів і технічних винаходів є не стохастичним, а детермінованим процесом, хоча дуже складним і непередбачуваним у своїх конкретних формах. Ця послідовність задає певний «ритм», який можна прискорити чи уповільнити, але не можна змінити.

Математичною моделлю такого «ритму» є нескінченна синусоїда. Її відхилення від осі абсцис (лінії тренду) можна розглядати в системі координат, де абсцисою виступає не час, а функція від потенціалу ефективності. Подібні коливання можна інтерпретувати як ендогенно детерміновані хвилі (осциляції) науково-технічного прогресу.

Введемо функцію ендогенної динаміки N, яка, з одного боку, змінюється у часі зі сталим темпом, а з другого боку, є сумою функції тренду та функції періодичних ендогенних коливань (осциляцій):

$$N(t) = N(0)\cdot\exp(-vt), \qquad N(V) = V \pm \phi(V)\cdot\sin[w(V)], \tag{70) (71}$$

де $V(p)$ – функція від потенціалу ефективності; $\phi(V)$ та $w(V)$ – функції відповідно амплітуди та частоти коливань.

З'ясуємо, які властивості повинні мати функції амплітуди та частоти. Почнемо аналіз з функції частоти хвиль НТП $w(V)$. Принциповою вимогою до цієї функції є нескінченість кількості хвиль як при збільшенні потенціалу до нескінченності, що відповідає руху у нескінченно далеке минуле, так і при зменшенні потенціалу до нуля, що відповідає руху у нескінченне далеке майбутнє. Перша частина цієї умови означає, що в системі координат $V0w$ її графік не може мати горизонтальної асимптоти. Друга частина цієї умови означає, що в цій же системі вона не може перетинати вісь ординат, яка, таким чином, має бути для неї вертикальною асимптотою. Порушення першої геометричної умови призводить до ефекту нескінченно довгої першої хвилі в розвитку економічної системи, порушення другої – до ефекту нескінченно довгої останньої хвилі.

Аналогічний характер має друга вимога до функції $w(V)$ – нескінченна кількість хвиль може бути тільки на нескінченності. Геометрично це означає заборону на ще одну вертикальну асимптоту функції частоти. Порушення цієї умови означало б виникнення нескінченної кількості хвиль при наближенні до певного рівня функції V, а отже, і до певного моменту часу.

Третя вимога має менш очевидний характер. Згідно з нею тривалість хвиль має змінюватися монотонно. Цю умову можна інтерпретувати як наявність певного закону історії. Немонотонність функції частоти означала б, що, незалежно від екзогенних чинників, науково-технічний прогрес то збільшував би тривалість хвиль, то зменшував би. Аналітично це виражалося б у залежності характеру історичного процесу не тільки від форми цієї функції, але й від величини її параметрів.

Остання вимога є очевидною – функція $w(V)$ має бути однозначною, інакше буде виникати ефект невизначеного стану. Усі ці варіанти функції $w(V)$ зображено на рисунку 6.

Звідси випливає, що єдино можливою елементарною функцією частоти хвиль НТП є логарифмічна:

$$w(V) = \omega \ln V, \tag{72}$$

де ω – безрозмірна стала, що визначає, в скільки разів крива осциляцій стиснута вздовж осі $\ln V$. При логарифмічній формі функції частоти «довжина» хвиль на осі $0V$ зростає:

$$...V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_{+1}, V_{+2}, ... = ...e^{-2\pi/\omega}, e^{-\pi/\omega}, 1, e^{+\pi/\omega}, e^{+2\pi/\omega} ... . \tag{73}$$

Розглянемо тепер функцію амплітуди коливань $\phi(V)$. В початку координат функція тренду $N = V$ та функція осциляцій $O(V) = \phi(V)\cdot\sin(\omega\ln V)$ дорівнюють нулю. Оскільки в цій точці значення функції $\sin(\omega\ln V)$ не визначено (хоча й знаходиться в межах ± 1), то нульове значення функції осциляцій буде лише за умови, що $\phi(0) = 0$. Геометрично це означає, що графік функції $\phi(V)$ має виходити з початку координат. Отже, принаймні на своїй лівій ділянці ця крива має монотонно віддалятися від початку координат (немає значення вгору чи вниз). Однак рух по осі $0V$ вправо – це рух у минуле. Звідси випливає важливий висновок: принаймні в майбутньому амплітуда коливань має зменшуватися.

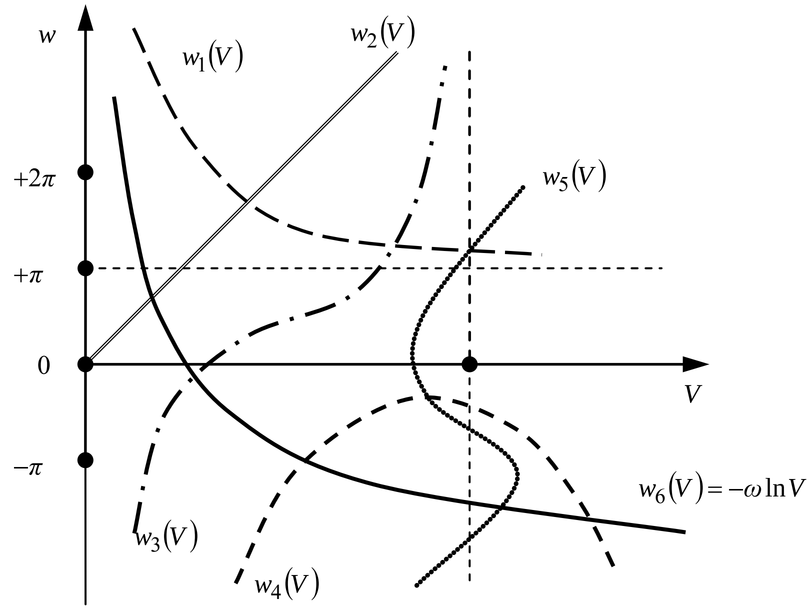

Рисунок 6 – Варіанти функції частоти ендогенних хвиль НТП:
$w_1(V)$ – з нескінченною першою хвилею НТП, $w_2(V)$ – з нескінченною останньою хвилею, $w_3(V)$ – з нескінченною кількістю хвиль за обмежений період часу, $w_4(V)$ – з історичним максимумом довжини хвиль, $w_5(V)$ – з невизначеним станом протягом обмеженого періоду часу

Наступна вимога до функції амплітуди – це додатність та монотонність функції $N(V)$. Якщо для зручності вважати функцію амплітуди додатною, то її величина не може перевищувати величини функції тренду $V(p)$, а похідна – похідної цієї функції, тобто одиниці: $dV/dV = 1$. Однак те, що аргументом синуса є нелінійна функція частоти, накладає додаткові обмеження на форму функції амплітуди. Дійсно, похідна функції осциляцій $O(V)$ дорівнює

$$dO/dV = d\phi/dV \cdot \sin(\omega \ln V) + \phi(V) \cdot \cos(\omega \ln V) \cdot \omega / V . \qquad (74)$$

Як бачимо, функція амплітуди має містити множник V, щоб нейтралізувати вплив похідної логарифму $1/V$. Похідна функції $\phi(V)$, вона сама та дріб ω/V виступають як коефіцієнти в сумі синуса та косинуса одного кута: $\psi_1 = d\phi/dV$, $\psi_2 = \phi(V) \cdot \omega / V$. Згідно з відповідною теоремою сума (різниця) цих величин дорівнює $\sqrt{\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2}$, помноженому на синус іншого кута (в цьому випадку не має значення його аналітична форма). Отже, має виконуватися нерівність

$$(d\phi/dV)^2 + \phi^2(V) \cdot (\omega/V)^2 < 1 . \qquad (75)$$

Усі ці вимоги задовольняє наступна елементарна функція амплітуди:

$$\phi(V) = \varphi V / (1+V) \qquad \Rightarrow \qquad d\phi/dV = \varphi/(1+V)^2 \qquad (76)\ (77)$$

де φ – стала «розмірності» V, що визначає максимальну величину відхилення від тренду на нескінченності. Як і функція частоти, ця функція $\phi(V)$ є монотонною та однозначною. При такій функції амплітуди ефект зменшення масштабу коливань набуває універсального значення і може розглядатися як закон динаміки економічної системи, що розвивається в ідеальних умовах. Графік цієї функції та її альтернативні варіанти зображено на рисунку 7.

Остаточно дістанемо наступну елементарну форму функції ендогенної динаміки та обмеження на її коефіцієнти:

$$N(V) = V \pm \varphi V (1+V)^{-1} \cdot \sin(\omega \ln V), \qquad \varphi \cdot \sqrt{1+\omega^2} < 1 . \qquad (78)\ (79)$$

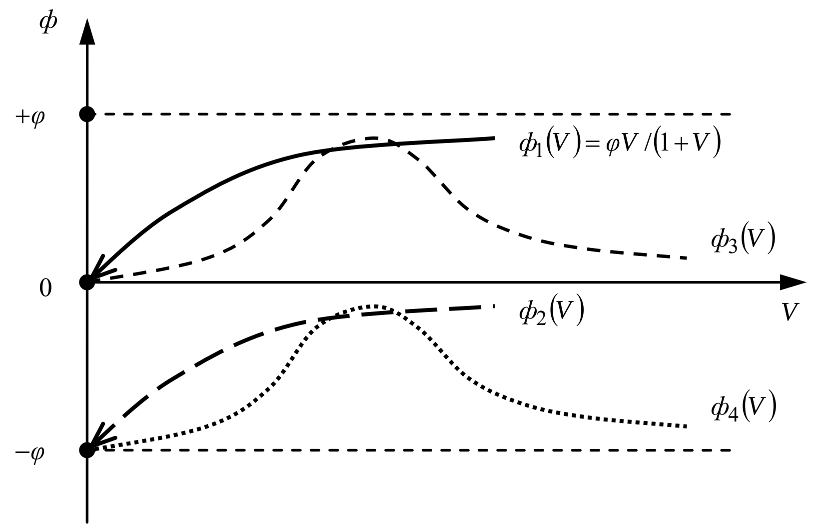

Рисунок 7 – Функції амплітуди ендогенних хвиль НТП:
$\phi_1(V)$ – згасаючих з часом, $\phi_2(V)$ – зростаючих, $\phi_3(V)$ – з максимумом масштабу коливань, $\phi_4(V)$ – з мінімумом масштабу коливань

Графік цієї функції зображено на рисунку 8.

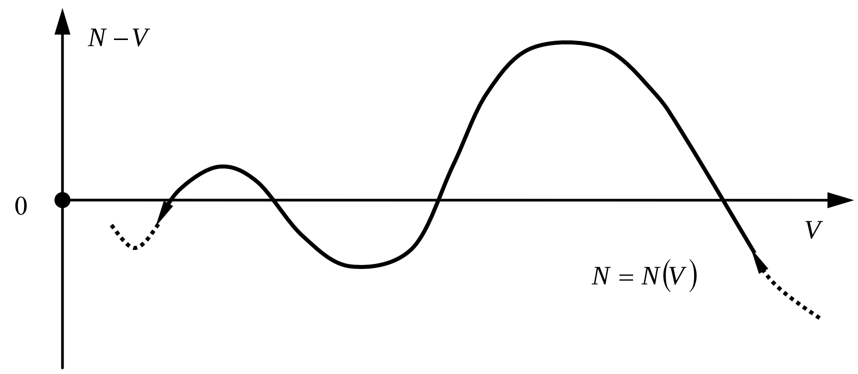

Рисунок 8 – Графік елементарної функції ендогенних хвиль НТП:
$N(V)=V\pm\varphi V(1+V)^{-1}\cdot\sin(\omega\ln V)$

Згідно з отриманим обмеженням максимальні коефіцієнти амплітуди та частоти мають змінюватися у протилежних напрямках: більшому значенню одного відповідатиме менше значення іншого. Цій залежності логічно надати більш універсального характеру, а саме: в науково-технічному прогресі, що відбувається в ідеальних умовах, під дією виключно внутрішніх властивостей, частота хвиль та їхня амплітуда змінюються у протилежних напрямках. Цей принцип стосовно майбутнього дає прогноз зменшення тривалості хвиль та їхнього масштабу, а стосовно минулого – базу для пояснення «розтягнутих» у часі історичних епох та їхніх суттєвих відмінностей. На ранніх етапах розвитку людства достатньо було простих винаходів, щоб суттєво підвищити продуктивність праці, а ефект від таких винаходів діяв протягом багатьох століть. В епоху науково-технічної революції наукові відкриття і технічні винаходи йдуть один за одним, зливаючись в єдиний неперервний потік. Це приводить до зближення фактичної траєкторії НТП з трендом і дає можливість точніше прогнозувати майбутнє.

Для визначення тривалості хвиль НТП у часовому вимірі необхідно задати конкретну форму усіх функцій – N, V та O. З цією метою розглянемо спрощений приклад з цими функціями. Нехай динаміка функції $N(t)$ визначається елементарним рівнянням сталого темпу, а $O(V)$ є розглянутою вище елементарною функцією осциляцій:

$$N(t)=N(0)\cdot\exp(-\nu t),\qquad O(V)=\varphi V(1+V)^{-1}\cdot\sin(\omega\ln V).\qquad (80)\ (81)$$

Точки, що відокремлюють одну хвилю від іншої, лежать на лінії тренду: $N(t)=V(p)$. Величина функції $V(p)$ в цих точках не залежить від її форми і визначається умовою $\ln V=-n^{\circ}\pi/\omega$, де n° –

умовний «номер» хвилі НТП. Звідси дістанемо, що $vt = \ln N(0) + n°\pi/\omega$. В результаті справжня довжина хвилі на осі часу змінюватися не буде.

Ефект збільшення тривалості минулих хвиль (або, відповідно, скорочення майбутніх) виникає, якщо, по-перше, припустити, що функція частоти є логарифмом не самої функції V, а її аргументу – потенціалу; а по-друге, обрати як функцію $V(p)$ елементарну показникову функцію:

$$w = \omega \ln p, \qquad V = e^{p} - 1. \tag{82) (83}$$

В результаті момент початку хвилі визначатиметься умовою

$$vt = \ln N(0) - \ln\{\exp[\exp(-n°\pi/\omega)] - 1\} \tag{84}$$

і їхня тривалість у майбутньому скорочуватиметься. Похідна показникової функції $V(p)$ при нульовому потенціалі дорівнює одиниці, що дає можливість не змінювати форму функції амплітуди. В результаті функція $N(p)$ набуде вигляду:

$$N(p) = e^{p} - 1 \pm \varphi p(1+p)^{-1} \cdot \sin(\omega \ln p). \tag{85}$$

Для переходу до системи координат $V0N$, в якій тренд є бісектрисою, потрібно замінити потенціал p оберненою функцією V: $p = \ln(1+V)$.

Ациклічні екзогенні коливання. Другою групою чинників, що призводять до коливань економічної системи навколо тренду, є загальноекономічні, соціально-політичні, а в багатьох випадках і природні події та процеси. Історія людства демонструє багато прикладів того, як народи, що починали свій розвиток лише в трохи відмінних умовах, з часом все більше відрізнялися рівнем та динамікою економічного розвитку.

Так, екстремальні кліматичні або геологічні умови завжди перешкоджатимуть підвищенню ефективності економіки такої країни. Ці негативні фактори можуть бути компенсовані іншими, позитивними факторами, але не можуть бути «вимкнені» за бажанням її населення.

Більш того, на ранніх етапах розвитку вони були менш вагомими, ніж стали пізніше. Прикладом цьому може служити вибір місця побудови все складніших інфраструктурних об’єктів. В епоху примітивного господарства та нерозвиненої торгівлі не було як можливості, так і потреби будувати швидкісні магістралі, розв’язки, розвідні мости та підземні тунелі. Ті негативні екзогенні чинники, що заважають їхньому будівництву, даються взнаки лише в міру економічного розвитку суспільства. Зрозуміло, що так само позитивні екзогенні чинники не можуть сприяти тому, чого ще нема. Прикладом такого впливу є місце розташування космодрому. Як відомо, найбільш вигідним його положенням є екватор. Екватор був завжди, проте його позитивне значення для запусків ракет стало важливим тільки після того, як з’явилися самі ракети.

Це саме, хоча і в менш очевидній формі, стосується соціально-політичних та етнологічних факторів. Так, одним із вагомих чинників перемоги Стародавнього Риму над сусідами-конкурентами була його, як би ми зараз сказали, толерантна «імміграційна» політика. Будь-хто міг стати його громадянином. Це сприяло припливу енергійних, ініціативних людей, що й було додатковим стимулом розвитку його господарства. І знову таки, на початковому етапі розвитку ефект був не дуже помітним, а потім, імовірно, почав підсилювати сам себе. В пізнішу добу результатом такої самої політики стало піднесення США, які й досі залишаються світовим технологічним лідером.

Прикладом негативного впливу соціально-політичних чинників є історія Візантійської імперії. Вона спочатку за рівнем ремісництва та будівництва випереджала країни Західної Європи. Імперія володіла секретною «суперзброєю» – «грецьким вогнем», що давав їй змогу перемагати у морських боях. Проте це не змогло нейтралізувати негативний вплив таких чинників, як менша індивідуальна свобода її підданих, більша роль релігії, більший деспотизм влади. З часом це ставало все більшою перешкодою. Візантія програла «технологічну гонку» своїм сусідам і зникла з історичної арени. Імовірно, той же шлях повторює нині нащадок Російської імперії – РФ. Сутність історії цієї держави виражається відомим афоризмом, що в ній «простір переміг час». Вона формувалася як північно-східна околиця європейської цивілізації. Таке географічне положення давало можливість, з одного боку, користуватися європейськими технологічними здобутками, а з другого, – безперервно розширюватися на схід. Країна все більше перетворювалася на сировинну мілітаризовану імперію. Кожний її злет відбувався завдяки імпорту західної техніки та технологій і тривав все менше.

Елементарною математичною моделлю такого історичного процесу є функція, що складається з двох протилежних за знаком доданків однакового степеня. Ці доданки можна розуміти як сили сприяння та гальмування НТП. Найпростіший тип таких доданків – лінійний, який складається з двох компонент – сталої, що не залежить від рівня ефективності національної економіки та змінної, що додатним чином залежить від цього рівня.

Кількість коренів багаточлена такої функції обмежена, а відхилення його графіка від осі абсцис – не симетричні (в загальному випадку). Подібні коливання навколо лінії тренду можна інтерпретувати як екзогенно детерміновані флуктуації науково-технічного прогресу.

Почнемо з найпростішого випадку, коли на економіку країни діють дві протилежні сили – екзогенна сила сприяння розвитку F^{+} та гальмування розвитку – F^{-}. Обидві сили є лінійними функціями:

$$F^{+} = \upsilon_{+} + \varepsilon_{+} A(a), \qquad F^{-} = \upsilon_{-} + \varepsilon_{-} A(a), \tag{86) (87}$$

де $A(a)$ – функція ефективності; υ_{+}, υ_{-} – сталі з «розмірністю» $\dim \upsilon = A(a)$, що не залежать від рівня економічного розвитку; ε_{+}, ε_{-} – безрозмірні сталі, що є коефіцієнтами відповідно сприяння та гальмування НТП. Таким чином, кожна з цих сил складається з автономної компоненти υ, що дорівнює величині екзогенного фактора, та компоненти $\varepsilon A(a)$, індукованої рівнем економічного розвитку.

Для подальшого аналізу необхідно визначити форму функцій ефективності $A(a)$. Вона повинна мати властивості самої ефективності, але бути визначеною від нуля до нескінченності:

$$dA / da > 0\,, \qquad A(0) = 0\,, \qquad a \to a_{\max} \Rightarrow A(a) \to \infty\,. \tag{88) (89) (90}$$

Таку властивість має наступна функція, яку для зручності виразимо через потенціал ефективності:

$$A(a) = \left(a^{-1} - a_{\max}{}^{-1}\right)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad A(p) = a_{\max} / p\,. \tag{91) (92}$$

Таким чином, як і потенціал, ця функція змінюється від нуля до нескінченності, але у протилежному напрямку. Це дає можливість у рівняннях динаміки замінювати потенціал на цю функцію. Зокрема, елементарне рівняння динаміки потенціалу набуде вигляду:

$$d \ln p / dt = -v \qquad \Rightarrow \qquad d \ln A / dt = +v\,. \tag{93}$$

Введемо тепер функцію екзогенної динаміки $X(A)$, що є сумою функції ефективності $A(a)$ та функцій екзогенних сил. Нехай, як і у випадку функції N, динаміка функції $X(t)$ визначається елементарним рівнянням сталого темпу:

$$X(t) = X(0) \cdot \exp(+vt). \tag{94}$$

Розглянемо цю функцію в системах координат $A0X$ та $e^{vt}X(0);0;X(t)$. В обох цих системах бісектриси мають економічний зміст. В системі $A0X$ бісектриса $X = A$ являє собою шлях, яким рухалася б економіка за умови збалансованості екзогенних сил F^{+} та F^{-} ($\upsilon_{+} = \upsilon_{-}$, $\varepsilon_{+} = \varepsilon_{-}$) або їх відсутності ($\upsilon_{+} = \varepsilon_{+} = 0$, $\upsilon_{-} = \varepsilon_{-} = 0$). Точки, що розташовані праворуч від бісектриси, є станами більш високої ефективності економіки, і, відповідно, навпаки. Початок координат у цій системі – це стан нульової ефективності економіки.

У системі $e^{vt}X(0);0;X(t)$ бісектриса – це траєкторія руху економіки в часі. Таким чином, вища точка на цій бісектрисі є пізнішим станом. Початок координат у цій системі – це стан нескінченно далекого минулого: $t \to -\infty \;\Rightarrow\; \exp(vt) \to 0$. Отже, якщо в системі $A0X$ два стани мають однакову ефективність, то геометрично «верхній» стан є більш пізнім, а «низький» – раннім.

Додавання автономної компоненти до правої частини рівняння ($X = A + \upsilon$) зрушує пряму $X = A$ по вертикалі вгору. З економічної точки зору, це означає, що той же рівень ефективності досягатиметься пізніше, або, що те саме, – в даний момент часу економіка буде мати меншу ефективність, ніж на лінії збалансованого розвитку. Звідси випливає додатний знак для υ_{-} і від'ємний – для υ_{+}.

Аналогічним чином визначимо знаки для індукованих компонент. Додавання компоненти εA змінює коефіцієнт нахилу лінії розвитку з ε на $1 + \varepsilon$ – вона повертається проти годинникової стрілки – і економіка починає відставати від шляху збалансованого розвитку. Отже, доданок $\varepsilon_{-} A$ повинен мати додатний знак, а доданок $\varepsilon_+ A$ – від'ємний. Зі збільшенням коефіцієнта позитивного впливу ε_+ кут нахилу лінії розвитку зменшується, і економіка в цей момент часу досягатиме все більшої ефективності. Якщо єдиним екзогенним чинником є позитивна індукована компонента з одиничним коефіцієнтом ($\varepsilon_+ = 1$), то кут нахилу лінії розвитку стає нульовим. «Шляхом» такої економіки стане вісь абсцис, і вона зможе мати будь-який рівень ефективності ще в нескінченно далекому минулому. Навпаки, якщо єдиним екзогенним чинником є негативна індукована компонента з нескінченним коефіцієнтом впливу ($\varepsilon_- = \infty$), то лінія розвитку збігатиметься з віссю ординат. Це означатиме, що така «економіка» не розвиватиметься взагалі – в ній завжди, починаючи з найдавніших часів, буде нульова ефективність. Геометричну інтерпретацію цього аналізу зображено на рисунку 9.

З урахуванням цих міркувань, отримаємо наступне рівняння функції екзогенної динаміки:

$$X(A) = A - (\upsilon_+ + \varepsilon_+ A) + (\upsilon_- + \varepsilon_- A) \Rightarrow X(A) = (-\upsilon_+ + \upsilon_-) + (1 - \varepsilon_+ + \varepsilon_-)A. \quad (95)$$

Функція буде зростаючою, якщо:

$$1 - \varepsilon_+ + \varepsilon_- > 0 \qquad \Rightarrow \qquad dX/dA = 1 - \varepsilon_+ + \varepsilon_- > 0. \quad (96)\,(97)$$

Оскільки мінімальне значення коефіцієнта негативного впливу – нуль, то коефіцієнт позитивного впливу має бути меншим за одиницю: $\varepsilon_- \geq 0$, $0 \leq \varepsilon_+ < 1$. Отже, в тих межах, в яких лінійна функція $X(A)$ має економічний зміст, вона є зростаючою.

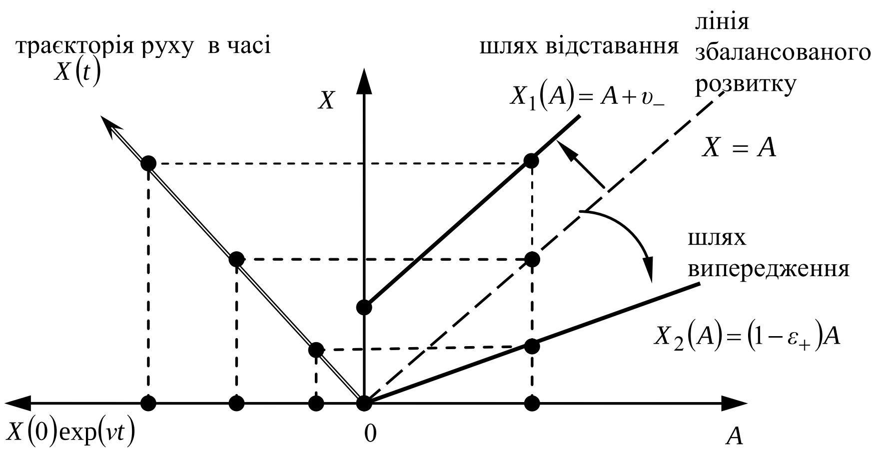

Рисунок 9 – Наслідки впливу екзогенних сил науково-технічного прогресу:
$X_1(A)$ – результат дії негативного автономного чинника,
$X_2(A)$ – результат дії позитивного індукованого чинника

Продовжимо аналіз цієї функції в системі координат $A0X$. Її графіком є лінія «вимушеного» розвитку, що перетинає вісь ординат $0X$ в точці різниці автономних компонент: $A = 0 \Rightarrow X = -\upsilon_+ + \upsilon_-$. Залежно від знаку цієї різниці точка перетину буде розташована вище або нижче осі абсцис $0A$. В першому випадку економіка розпочинатиме свій розвиток з «низького старту», а в другому – з «високого», в якому домінує сила сприяння НТП. Зрозуміло, що можлива лише одна точка, в якій фактичний шлях економіки перетинає лінію збалансованого розвитку. Вона визначається умовою $X = A = (-\upsilon_+ + \upsilon_-)/(-\varepsilon_- + \varepsilon_+)$. Економічний зміст цієї умови полягає в тому, що країна, яка в минулі часи була в кращих умовах ($\upsilon_+ > \upsilon_-$), перетне лінію $X = A$, лише якщо індукуватиме силу, що гальмуватиме її розвиток ($\varepsilon_- > \varepsilon_+$). Навпаки, країна, в якої була «важка» рання історія ($\upsilon_+ < \upsilon_-$), щоб перетнути бісектрису $X = A$, має індукувати силу, що прискорює її розвиток ($\varepsilon_- < \varepsilon_+$). Шляхи «вимушеного» розвитку двох таких країн показано на рисунку 10.

Як показує ця геометрична інтерпретація, на початку розвитку для обох країн виникають парадокси. Перша країна вже у нескінченно далекому минулому має певний рівень ефективності A_0. Нижчої ефективності для неї ніколи не було, що утворює ефект «вакууму ефективності». Друга країна, навпаки, має нульову ефективність в момент часу T_0, що породжує ефект «вакууму часу» – попереднього часу для неї немає. Зрозуміло, що у випадку нульової індукції ($\varepsilon_+ = \varepsilon_- = 0$) парадокси тільки підсилюються. Шляхи вимушеного розвитку двох економік стають горизонтальними лініями. Тоді друга економіка спочатку не існувала б, а потім відразу досягла б нескінченої ефективності. Перша ж економіка взагалі ніколи не існувала б у реальному часі. Формально можлива протилежна ситуація, коли автономні компоненти є нульовими: $\upsilon_+ = \upsilon_- = 0$. Шляхи розвитку двох країн стали би променями, що виходять з початку координат. Проте така ситуація нелогічна вже з суто економічної точки зору. Вона означала би, що екзогенних факторів нема, а реакція на них – є.

З економічної точки зору, такі ефекти пояснюються тим, що в лінійній функції $X(A)$ автономні компоненти з самого початку впливають на «те, чого ще нема», тобто при нульовій ефективності. Разом з тим, вони дають підстави зробити важливий висновок: на екзогенні чинники, що гальмують або прискорюють розвиток, економіка будь-якої країни, принаймні на початковому етапі, не може реагувати лінійно. Логічним узагальненням цього висновку є припущення, що і розвинена економіка реагує на екзогенні чинники нелінійним чином. Припустимо, що цей степінь нелінійності реакції є сталим протягом усієї історії і специфічним для даної крани.

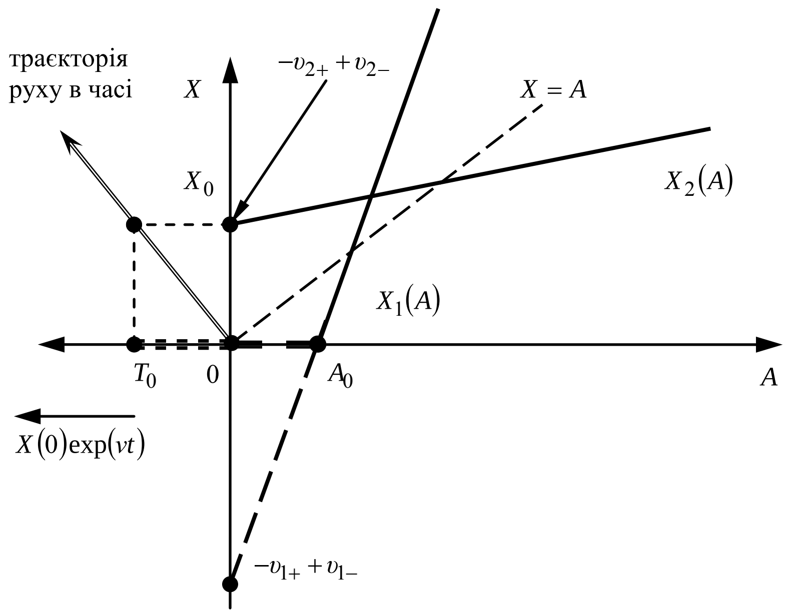

Рисунок 10 – Шляхи розвитку двох країн з різними початковими умовами:
$X_1(A)$ – з кращими, $X_2(A)$ – з гіршими. У першої країни «вакуум ефективності» – $0A_0$, у другої – «вакуум минулого» – $0T_0$. (Величина функції X в момент відліку часу $t = 0$ для обох країн однакова)

Коректність нелінійної форми функції екзогенної динаміки визначається принципом однакової розмірності обох частин її рівняння. У вихідних лінійних рівняннях усі доданки – X, A, υ та εA – мали розмірність ефективності a. Отже, і нелінійні сили $F(A)$ теж повинні мати таку розмірність. Це можливо лише за умови, що вони є лінійно однорідними функціями відносно компонент υ та εA:

$$F(A) = \left(\upsilon^{\eta} + \varepsilon^{\eta} A^{\eta}\right)^{1/\eta}, \tag{98}$$

де η – безрозмірна стала, що характеризує степінь реакції економіки на екзогенні чинники.

Розглянемо цю функцію при різних значеннях параметра η. У випадку посиленої реакції економіки на екзогенні чинники ($\eta > 0$) індукована компонента εA визначатиме шлях економіки на стадії високого розвитку, а у випадку послабленої ($\eta < 0$) – на ранній стадії:

$$dF/dA = \left(\upsilon^{\eta} A^{-\eta} + \varepsilon^{\eta/(1-\eta)}\right)^{(1-\eta)/\eta}, \tag{99}$$

$$\eta > 0 \Rightarrow dF(\infty)/dA = \varepsilon, \qquad \eta < 0 \Rightarrow dF(0)/dA = \varepsilon. \qquad (100)\ (101)$$

В результаті економіка з посиленою реакцією у міру свого розвитку починає все більше відхилятися від лінії збалансованого розвитку: позитивна індукція все більше прискорює її, а негативна – все більше гальмує. Для економіки з послабленою реакцією все відбувається навпаки. Індукція, яка виникає внаслідок її розвитку, має значення тільки на початковій стадії. І саме вона визначає напрямок і степінь її відхилення від лінії збалансованого розвитку. Умова монотонності функції екзогенної динаміки не змінюється ($0 \le \varepsilon_+ < 1$), проте набуває більш логічного змісту. Тепер вона означає, що навіть у найкращих умовах, при нульовій силі гальмування ($F^- = 0$), економіка не може «на 100 %» використати позитивний екзогенний фактор. В іншому випадку ($F^- = 0$, $\varepsilon_+ \ge 1$) виникав би вже розглянутий ефект «вакууму ефективності». В найгірших умовах ($F^+ = 0$) при нескінченній негативній індукції ($\varepsilon_- = \infty$) сила гальмування стає сталою ($F^- = \upsilon_-$), що призводитиме до «вакууму минулого». Навпаки, рівність обох коефіцієнтів індукції нулю ($\varepsilon_+ = \varepsilon_- = 0$) до парадоксів не призводить. Сили гальмування та сприяння НТП стають нульовими, і економіка рухатиметься по лінії збалансованого розвитку. З економічної точки зору, така ситуація означає, що економіка цієї країни ніяк не реагує на екзогенні фактори. Отже, для економіки з послабленою реакцією на екзогенні чинники коефіцієнти індукції мають знаходитися в межах:

$$\eta < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \varepsilon_+ < 1, \qquad 0 \le \varepsilon_- < \infty. \qquad (102)\ (103)$$

Зрозуміло, що вплив автономної компоненти для таких економік теж буде протилежним. При посиленій реакції на екзогенні чинники графік функції виходитиме з точки автономної компоненти, а при послабленій – з нуля:

$$\eta > 0 \Rightarrow F(0) = \upsilon, \qquad \eta < 0 \Rightarrow F(0) = 0. \qquad (104)\ (105)$$

Це означає, що у випадку посиленої реакції на екзогенні чинники виникають парадокси «вакууму» часу та ефективності. З цієї точки зору, розглянута вище лінійна функція теж характеризує таку посилену реакцію. Навпаки, у випадку послабленої реакції на екзогенні чинники ($\eta < 0$) економіка розпочинає свій шлях з «абсолютного нуля» – $\exp(\nu t) = A = 0$. Для неї автономні компоненти υ матимуть вплив тільки на стадії високого розвитку:

$$\eta > 0 \Rightarrow F(\infty) = \infty, \qquad \eta < 0 \Rightarrow F(\infty) = \upsilon. \qquad (106)\ (107)$$

Відхилення від лінії збалансованого розвитку $X = A$ буде сталим і визначатиметься знаком різниці автономних компонент. Її розвиток вже не буде прискорюватися за рахунок позитивної індукції екзогенних чинників, але й не буде гальмуватися внаслідок негативної:

$$\eta < 0 \quad \Rightarrow \quad dF(\infty)/dA = 0. \tag{108}$$

Економіка з послабленою реакцією на екзогенні чинники має й інші важливі властивості. У випадку нульових автономних компонент ($\upsilon_+ = \upsilon_- = 0$) сили сприяння та гальмування теж будуть нульовими ($F^+ = F^- = 0$), що є цілком логічним: за відсутності екзогенних факторів немає і реакції на них. За цих обставин економіка також рухатиметься вздовж лінії збалансованого розвитку. Навіть ситуація нескінченних екзогенних факторів ($\upsilon_+ = \upsilon_- = \infty$) не призводитиме до парадоксів. В цьому випадку сили гальмування та розвитку складатимуться тільки з індукованої компоненти ($F = \varepsilon A$), а шлях економіки перетвориться на промінь, що виходитиме з початку координат. Залежно від знаку величини $1 + \varepsilon_- - \varepsilon_+$ економіка буде або перманентно випереджати лінію збалансованого розвитку, або перманентно відставати від неї. Отже, в економіці з послабленою реакцією парадокси виникають не внаслідок екстремальної величини екзогенного фактора υ, а внаслідок екстремальної індукції, створеної розвитком самої економіки.

Геометричну інтерпретацію різних сил реакції на екзогенні чинники зображено на рисунку 11.

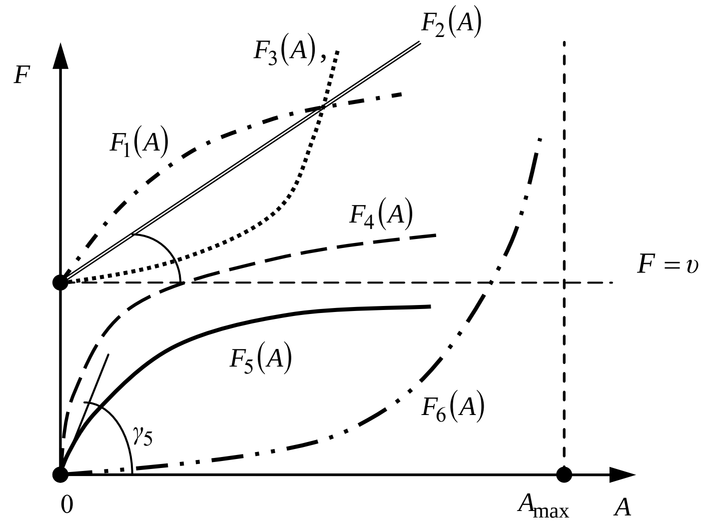

Рисунок 11 – Сили реакції економіки на екзогенні чинники НТП:
$\eta_1 > 1$, $\eta_2 = 1$, $0 < \eta_3 < 1$, $\eta_4 = 0$, $\eta_{5,6} < 0$; $tg\gamma = \varepsilon$

Отже, послаблена реакція економіки на екзогенні чинники є адекватною, а посилена – ні. В обох випадках точка перетину лінії збалансованого розвитку є єдиною і визначається умовою протилежності знаків різниць автономних та індукованих компонент:

$$F^+(A) = F^-(A) \;\Rightarrow\; A^\eta = \left(\upsilon_+{}^\eta - \upsilon_-{}^\eta\right)/\left(\varepsilon_-{}^\eta - \varepsilon_+{}^\eta\right). \quad (109)$$

За такої умови в економіках виникатиме ефект «двофазного» розвитку – на першій фазі в один бік від лінії тренду, на другій фазі – у протилежний. Однак залежно від сили їхньої реакції на екзогенні чинники трендом будуть різні лінії: при посиленій реакції коливання будуть навколо лінії вимушеного розвитку, а при послабленій реакції – навколо лінії збалансованого розвитку. В другому випадку ця лінія може інтерпретуватися як історичний тренд, до якого буде тяжіти економіка, відхиляючись від нього внаслідок дії екзогенних чинників. Варіанти шляхів розвитку економіки з адекватною (послабленою) реакцією на екзогенні чинники зображено на рисунку 12.

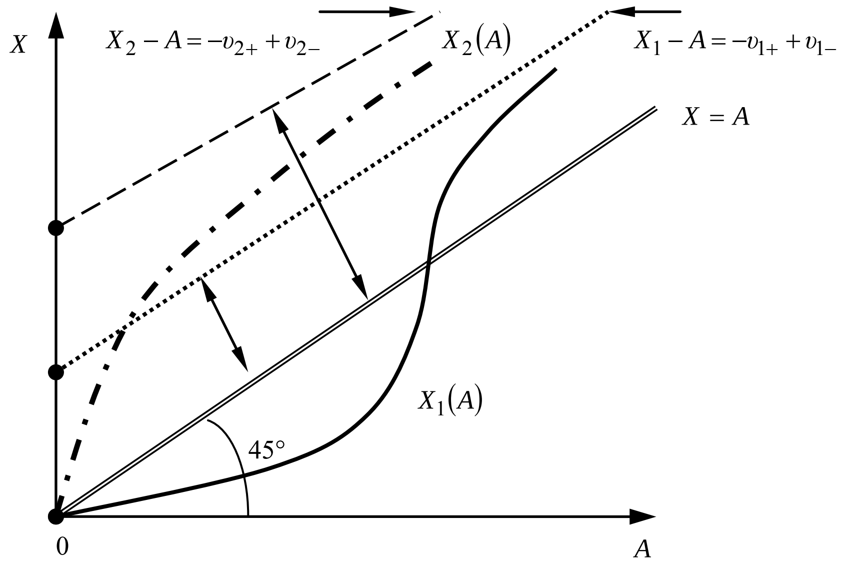

Рисунок 12 – Шляхи розвитку економік з адекватною реакцією на екзогенні чинники:
$X_1(A)$ – передова на І фазі розвитку, $X_2(A)$ – перманентно відстала

У двох розглянутих системах координат спільна нульова точка відображала початок розвитку економіки – нульову ефективність у нескінченно далекому минулому. З'ясуємо характер її динаміки при наближенні до максимальної ефективності у нескінченно далекому майбутньому. Для цього звернемося до двох «обернених» систем координат – $p0X^{-1}$ та $X(0)^{-1}e^{-\nu t};0;X(t)^{-1}$. В першій з цих систем функція екзогенної динаміки набуде вигляду:

$$X^{-1}=\left[A-F^{+}+F^{-}\right]^{-1}. \qquad (110)$$

У цій системі координат поведінка траєкторії розвитку економіки визначатиметься похідною

$$d\left(X^{-1}\right)/dp=\left[A-F^{+}+F^{-}\right]^{-2}\cdot\left(1-dF^{+}/dA+dF^{-}/dA\right)\cdot A^{2}/a_{\max}. \qquad (111)$$

де $A^{2}/a_{\max}=\left(a_{\max}/p\right)^{2}=-dA/dp$. Звідси дістанемо:

$$d\left(X^{-1}\right)/dp=\left[1-F^{+}/A+F^{-}/A\right]^{-2}\cdot\left(1-dF^{+}/dA+dF^{-}/dA\right)\cdot a_{\max}^{-1}. \qquad (112)$$

При наближенні потенціалу до нуля функція $A(p)$ зростатиме до нескінченності, а похідні та середні значення сил $F(A)$ – скорочуватимуться до нуля:

$$p\to 0 \;\Rightarrow\; A\to\infty \;\Rightarrow\; dF/dA\to 0, \quad F/A\to 0. \qquad (113)$$

Отже, похідна величини X^{-1} наближатиметься до $a_{\max}^{-1}$:

$$p\to 0 \;\Rightarrow\; d\left(X^{-1}\right)/dp\to a_{\max}^{-1}. \qquad (114)$$

Це означає, що на «кінцевій» стадії розвитку економіки її динаміка не залежатиме від сил F^{+} та F^{-}, а визначатиметься виключно величиною технологічного максимуму ефективності. Таку особливість має саме функція $X(A)=A-F^{+}(A)+F^{-}(A)$, для якої лінія збалансованого розвитку є бісектрисою в системі координат $A0X$. Навпаки, у випадку функції $X(p)=p+F^{+}(p)-F^{-}(p)$ лінія збалансованого розвитку була би бісектрисою в системі координат $p0X$. Поведінка траєкторії такої економіки була б протилежною: на кінцевій стадії вона визначалася би коефіцієнтами індукції ε_{+} та ε_{-}, а на початковій – величиною технологічного максимуму $a_{\max}$. З економічної точки зору, це видається нелогічним, чим і пояснюється вибір саме функції $X(A)$.

Формально, крім посиленої та послабленої реакції на екзогенні чинники, можлива і нейтральна реакція. В цьому випадку сила $F(A)$ стає добутком автономної та індукованої компонент:

$$\eta=0 \;\Rightarrow\; F(A)=\upsilon^{\alpha}\cdot(\varepsilon A)^{1-\alpha}, \qquad (115)$$

де α – додатна стала, знаходиться в межах $0<\alpha<1$. Графік такої функції виходитиме з точки абсолютного нуля, проте його кут нахилу в ній буде нескінченним, а на нескінченості – нульовим:

$$F(0)=0, \qquad F(\infty)=\infty; \qquad (116)\,(117)$$

$$dF/dA=(1-\alpha)\upsilon^{\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}A^{-\alpha} \;\Rightarrow\; dF(0)/dA=\infty,\; dF(\infty)/dA=0. \qquad (118)\,(119)\,(120)$$

Це означає, що в такій економіці можлива лише сила гальмування НТП. Негативний екзогенний фактор υ_{-} в такій економіці стає непереборним – при збільшенні його до нескінченності економіка нескінченно віддалятиметься від лінії збалансованого розвитку.

На відміну від неї, в економіці з послабленою реакцією такий непереборний фактор може співіснувати з разом із позитивним екзогенним чинником. Його особливістю буде поява додаткового, тепер вже екзогенного обмеження на збільшення ефективності:

$$F^{-}(A)=\varepsilon\left(A^{\eta}-A_{\max}{}^{\eta}\right)^{1/\eta},\; \eta<0; \qquad A\to A_{\max}\Rightarrow F^{-}\to\infty, \qquad (121)\,(122)$$

де $A_{\max}$ – екзогенний максимум ефективності. Геометрично це означає появу вертикальної асимптоти у графіка функції $F^{-}(A)$, а економічно – неможливість досягнути ендогенного, технологічно зумовленого максимуму ефективності. Як би довго не існувала така економіка, вона ніколи не зможе перетнути цю межу, що все більше віддалятиме її від лінії збалансованого розвитку. У нашого виду Homo sapiens такого фактора не було (або ми ще не наблизилися до цієї межі), а у виду Homo neanderthalensis був не один такий фактор. В результаті протягом майже півмільйона років цей вид так і не зміг подолати межу кам’яної доби.

Завершуючи аналіз функції екзогенної динаміки, відзначимо, що її можна узагальнити на випадок багатьох факторів, що по-різному впливають на економіку. В цьому випадку сила реакції визначатиметься як:

$$F(A)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\upsilon_i{}^{\eta}+\varepsilon_i{}^{\eta}A^{\eta}\right)^{-1}/n\right]^{-1/\eta}, \ \eta<0, \tag{123}$$

де n – кількість екзогенних факторів. При цьому кількість позитивних та негативних факторів може бути різною, що й визначатиме максимально можливу кількість точок перетину лінії історичного тренду.

Функція стимулювання НТП. Ендогенні хвилі НТП та ациклічні коливання внаслідок дії екзогенних чинників відхиляють рух економічної системи від її магістрального шляху розвитку – тренду. Ці осциляції та флуктуації не впливають на максимально можливий темп НТП, що визначається функцією корисності. Разом з тим, суспільство, спрямовуючи до науково-дослідного сектору додаткові ресурси вищої якості, може наблизитися до цього темпу.

Адекватно описати цей процес стимулювання НТП можна, якщо в розглянутих вище рівняннях динаміки врахувати вплив окремих економічних факторів. Для цього помножимо максимально можливий темп скорочення функції $V(p)$ на функцію одного з факторів НТП:

$$d\ln V/dt=-\nu\cdot i(Z), \tag{124}$$

де Z – деякий фактор НТП (наприклад обсяг певного ресурсу, задіяного у науково-дослідному секторі), а $i(Z)$ – функція від цього фактора. Зрозуміло, що між величиною фактора та його впливом на динаміку ефективності повинен існувати додатний зв’язок, тому:

$$di/dZ>0\,. \tag{125}$$

Далі врахуємо, що для будь-якого процесу існує обмеження не тільки на результат – у вигляді його максимально можливого рівня, але й на фактори – у вигляді їх мінімально необхідної величини. В природних процесах такими обмеженнями виступають різні бар’єри, порогові величини та критичні рівні. Стосовно науково-технічного прогресу це означає, що він не відбуватиметься при як завгодно малих обсягах ресурсів. З другого боку, навіть нескінченно великі обсяги ресурсів, задіяні у даний момент часу, не можуть прискорити його до нескінченності. За найсприятливіших умов здійснення чергового наукового відкриття або винайдення нової технології та техніки потребує часу.

Виходячи з цих міркувань, введемо поняття індексу достатності фактора НТП:

$$i=\left(Z-Z_{\min}\right)/Z\,, \tag{126}$$

де i – індекс достатності фактора НТП, Z та $Z_{\min}$ – фактична та мінімально необхідна величина цього фактора. При мінімальній величині фактора індекс його достатності дорівнює нулю, а при нескінченній – одиниці:

$$Z=Z_{\min}\ \Rightarrow\ i=0\,, \qquad Z\to\infty\ \Rightarrow\ i\to 1\,. \qquad (127)\ (128)$$

Економічний зміст індексу достатності очевидний – він показує, яку частку фактора Z становить перевищення його величини над мінімально необхідною.

Розглянемо вплив окремого фактора на темп НТП. Він визначається першою похідною індексу достатності:

$$di/dZ=Z_{\min}/Z^2=(1-i)^2/Z_{\min}\,. \tag{129}$$

При максимальній достатності цього фактора ($i=1$) його вплив дорівнює нулю, проте при нульовій достатності він більший за нуль ($di/dZ=1/Z_{\min}$). Ситуація, коли мінімум фактора має максимальний вплив на темп НТП, виглядає нереалістично. Більш логічним видається припущення, що цей вплив зростає поступово, в міру все більшої достатності фактора, і лише потім починає спадати до нуля. За такого припущення закон спадної віддачі і для фактора Z, і для фактора часу t діятиме тільки на «кінцевій» стадії розвитку.

Як і у випадку потенціалу ефективності, цей недолік можна усунути шляхом заміни індексу $i(Z)$ на функцію від нього. Така функція $S(i)$ повинна мати ті самі властивості, що й сам індекс:

$$dS/di>0\,, \qquad i=0\ \Rightarrow\ S=0\,, \qquad i=1\ \Rightarrow\ S=1\,. \qquad (130)\ (131)\ (132)$$

З урахуванням цієї функції, вплив фактора НТП визначатиметься як

$$dS/dZ = dS/di \cdot di/dZ = dS/di \cdot (1-i)^2 / Z_{\min} . \quad (133)$$

Як бачимо, потрібна динаміка віддачі фактора Z досягатиметься за умови, що похідна dS/di дорівнюватиме нулю при нульовій достатності, а при усіх вищих рівнях буде додатною та скінченною.

Знайдемо такі функції з умови пропорційності їхніх похідних елементарним функціям індексу. Перша з таких функцій визнається умовою пропорційності її похідної степеневій функції індексу:

$$dS/di \propto i^{\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad S_{\text{pow}} = i^{1+\kappa} , \quad (134)\ (135)$$

де κ – безрозмірна стала. Друга така функція визначиться з умови пропорційності її похідної показниковій функції:

$$dS/di \propto \left(e^{i}-1\right) \Rightarrow \quad s_{\exp}(i) = e^{\kappa i} - \kappa i - 1 , \quad S_{\exp} = s_{\exp}(i)/s_{\exp}(1) . \quad (136)\ (137)$$

Похідна третьої функції є пропорційною логарифмічній функції:

$$dS/di \propto \ln(1+i/e) \Rightarrow \quad (138)$$

$$s_{\log}(i) = (1+\kappa i/e)\cdot \ln(1+\kappa i/e) - \kappa i/e \qquad S_{\log} = s_{\log}(i)/s_{\log}(1) . \quad (139)$$

Нарешті, похідна четвертої функції є пропорційною відношенню, що містить як експоненту індексу, так і сам індекс:

$$dS/di \propto \left[\left(e^{i}-1\right)/\left(e^{i}-i\right)\right] \Rightarrow s_{\text{mix}}(i) = \ln\left(e^{\kappa i} - \kappa i\right), \; S_{\text{mix}} = s_{\text{mix}}(i)/s_{\text{mix}}(1) . \quad (140)\ (141)$$

Перехід до багатофакторної функції стимулювання НТП можна зробити двома способами. Перший, традиційний, спосіб полягає у застосуванні середніх з однойменних функцій S_j :

$$\overline{S}_g = \prod_{j=1}^{m} S_j \wedge \gamma_j , \qquad \overline{S}_h = \left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j S_j^{-\beta} \right)^{-1/\beta} \qquad \text{при } \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1 \quad (142)\ (143)$$

де $\overline{S}_g , \overline{S}_h$ – середня геометрична та середня гармонійна з функцій окремих індексів, а β та γ – безрозмірні сталі. Другий спосіб полягає в тому, що функції $S_{\exp}$, $S_{\log}$, S_{mix} перетворюються на багатофакторні шляхом заміни добутку κi на добуток індексів окремих факторів:

$$S = S\left(\prod_{j=1}^{m} i_j \right) . \quad (144)$$

Ефективність продукту і капіталу. Усі розглянуті вище рівняння та функції були побудовані за умови незмінного характеру результату виробництва Y . Проте вироблений продукт теж має певну ефективність a_Y та її максимальний рівень $a_{Y\max}$. (Для споживчих продуктів цей показник може виражати величину корисності на одиницю продукту за одиницю часу: $\dim a_C = u/(qt)$). При цьому, для випуску будь-якого обсягу продукції певної якості потрібна мінімальна якість факторів виробництва – $a_{K\min}$, $a_{L\min}$. Врахування цих зв'язків змінює традиційну виробничу функцію на модифіковану. Розглянемо цю модифікацію на прикладі виробничої функції Леонтьєва як найпростішої. Теоретично можливі наступні її форми:

— максимальна ефективність продукту та мінімальна ефективність капіталу є взаємно незалежними величинами, в результаті чого можна створювати продукт будь-якої якості при будь-якій якості основних фондів:

$$Y = \left(1 - a_Y / a_{Y\max}\right)\cdot\left(1 - a_{K\min}/a_K\right)\cdot a_K K \Rightarrow a_Y < a_{Y\max} , a_K > a_{K\min} ; \quad (145)$$

— максимальна ефективність продукту, що досяжна у даному виробничому процесі, залежить від ефективності основних фондів:

$$Y = \left[1 - \left(a_Y / a_{Y\max}\right)/\left(1 - a_{K\min}/a_K\right)\right]\cdot a_K K \Rightarrow a_Y < a_{Y\max}\left(1 - a_{K\min}/a_K\right), \quad (146)$$

де $a_{Y\max}$ – максимальна ефективність продукту при нескінченній ефективності основних фондів;

— мінімальна ефективність основних фондів, що необхідна в цьому виробничому процесі, залежить від ефективності продукту:

$$Y = \left[1 - \left(a_{K\min}/a_K\right)/\left(1 - a_Y / a_{Y\max}\right)\right]\cdot a_K K \Rightarrow a_K > a_{K\min}/\left(1 - a_Y / a_{Y\max}\right), \quad (147)$$

де $a_{K\min}$ – мінімальна ефективність основних фондів при нульовій ефективності продукту.

Обмеження в двох останніх функціях еквівалентні:

$$a_Y / a_{Y\max} + a_{K\min} / a_K < 1 , \qquad (148)$$

що дає можливість побудувати наступну комбіновану функцію:

$$Y = i_{aKY} \cdot a_K K , \qquad i_{aKY} = 1 - \left[(a_Y / a_{Y\max})^\wedge \sigma_Y + (a_{K\min} / a_K)^\wedge \sigma_K \right], \qquad (149)\ (150)$$

де σ_Y, σ_K – безрозмірні сталі, що відображають відносний вплив ефективності продукту та ефективності капіталу. Величину i_{aKY} логічно назвати індексом ефективності капіталу як фактора виробництва. (Індекс ефективності праці як фактора виробництва i_{aLY} буде мати аналогічну форму). На основі отриманої величини i_{aKY} теж можна побудувати показникові, логарифмічні та степеневі функції.

Цей індекс досягає одиниці лише при одночасній нульовій ефективності продукту та нескінченній ефективності капіталу (або відсутності обмежень: $a_{Y\max} = \infty$, $a_{K\min} = 0$). Таким чином, урахування обмежень ефективності продукту та капіталу зменшує кількісний результат виробництва порівняно з вихідною виробничою функцією. Звідси коефіцієнти ефективності a_K та a_L можна інтерпретувати як номінальні ефективності капіталу та праці, а добутки

$$a_{Kreal} = i_{aKY} \cdot a_K \qquad a_{Lreal} = i_{aLY} \cdot a_L \qquad (151)\ (152)$$

– як реальні ефективності цих факторів у виробничому секторі.

Враховуючи таку модифікацію виробничої функції, уточнимо функцію достатності факторів НТП. Аргументами функції $S = S(i_1, i_2, ... i_m)$ будуть, зокрема, індекси достатності обсягу та ефективності капіталу як факторів НТП:

$$i_{KA} = 1 - K_{A\min} / K_A , \qquad i_{aKA} = 1 - \left[(a_Y / a_{Y\max})^\wedge \sigma_Y + (a_{KA\min} / a_K)^\wedge \sigma_K \right], \qquad (153)\ (154)$$

де $K_{A\min}$, K_A – мінімально необхідний та фактичний обсяг основних фондів у науково-дослідному секторі, $a_{KA\min}$ – мінімально необхідний рівень ефективності основних фондів у науково-дослідному секторі. (Аналогічні величини будуть і для праці – $L_{A\min}$, L_A, i_{LA}, i_{aLA}).

У модифікованій виробничій функції обидва коефіцієнти ефективності є змінними в часі – $a_Y(t)$, $a_K(t)$. Динаміку ефективності продукту можна визначити за допомогою будь-якої комбінації вже відомих рівнянь та функцій НТП. Зокрема, це ж справедливе для ефективності нових основних фондів $a_I(t)$, які є інвестиційним продуктом I. Стосовно динаміки середньої ефективності діючих основних фондів $a_K(t)$, вона потребує окремого аналізу.

Ця ефективність залежить від обсягу та ефективності інвестованого продукту. Дійсно, введення в дію нових фондів приводить до зміни середньої ефективності вже існуючих. Отже, рівняння динаміки коефіцієнта a_K можна визначити за допомогою балансу приростів. Розглянемо сукупну ефективність $a_K K$, де K – загальна величина задіяних основних фондів. Внаслідок інвестицій цей добуток зростає на величину $a_I I dt$. Внаслідок функціонування капіталу ефективність кожної його одиниці зменшується на величину $\zeta a_K dt$, а всього обсягу – на $\zeta a_K K dt$, де ζ – норма падіння ефективності, що має розмірність $1/t$. Припустимо далі, що вибувають тільки задіяні основні фонди, які мають ту саму середню ефективність a_K. На підставі цих міркувань дістанемо наступні балансові рівняння:

$$d(a_K K) = a_I I dt - (\zeta + \delta) a_K K dt , \qquad dK = Idt - \delta K dt , \qquad (155)\ (156)$$

де I – основні фонди, що введені в дію (обсяг інвестицій); a_I – їхня ефективність ($\dim a_I = \dim a_K = q/(kt)$); δ – норма вибуття капіталу ($\dim \delta = 1/t$). Звідси дістанемо рівняння динаміки середньої ефективності діючих основних фондів:

$$d \ln a_K / dt = (a_I / a_K - 1) I / K - \zeta . \qquad (157)$$

Це рівняння показує, що ефективність існуючих основних фондів зростає, якщо введені в дію фонди є більш досконалими ($a_I > a_K$), і зменшується незалежно від цього зі сталим темпом ζ.

Стосовно норми падіння ефективності основних фондів логічно припустити, що вона знаходиться у додатній залежності від ступеня досконалості капіталу. Тоді сталу ζ можна інтерпретувати як номінальну норму, а величину $\zeta / (a_{K\max} / a_K - 1)$ – як реальну. З урахуванням цієї скоректованої величини рівняння динаміки ефективності діючих основних фондів набуде вигляду:

$$d \ln a_K / dt = (a_I / a_K - 1) I / K - \zeta / (a_{K\max} / a_K - 1). \tag{158}$$

Аналогічний підхід застосуємо до норми вибуття основних фондів. Якщо не брати до уваги суто фізичний вихід з ладу основних фондів, то процес їх вибуття, на відміну від падіння ефективності, є плановим, керованим процесом. Економічний («моральний») знос основних фондів визначатиметься їх придатністю до випуску продукції певної якості. Очевидно, що моделювати цей процес можна на основі вже відомих підходів, згідно з якими реальна норма вибуття дорівнюватиме

— $\delta / [1 - (a_{K\min} / a_K) / (1 - a_Y / a_{Y\max})]$, (159)

що відображає вплив досконалості продукту на мінімально прийнятний рівень ефективності основних фондів;

— або $\delta / [1 - (a_Y / a_{Y\max}) / (1 - a_{K\min} / a_K)]$, (160)

що відображає вплив ступеня придатності основних фондів на максимально досяжний рівень ефективності продукту. Звідси випливають реальна норма вибуття основних фондів та модифіковане рівняння їх динаміки:

$$\delta_{real} = \delta / i_{aKY}, \qquad dK / dt = I - \delta_{real} K. \qquad (161)\ (162)$$

Висновки. Проведене дослідження дало можливість отримати важливі теоретичні результати.

По-перше, було показано, що класичні моделі необмеженого прогресу є граничним випадком одного з пропонованих рівнянь. У свою чергу, ендогенний темп НТП виступає як верхня межа його стимулювання. Аналогічним чином, традиційні виробничі функції виявилися граничним випадком виробничої функції з обмеженнями на максимальну ефективність продукту та мінімальну – факторів виробництва. Таким чином, пропонована методологія реалізує важливий загальнонауковий принцип відповідності, згідно з яким моделі, що описують вужче коло процесів та явищ, мають бути окремим випадком більш загальної моделі.

По-друге, дослідження продемонструвало евристичні можливості методу переходу від простого до складного. Послідовне врахування нових виробничих чинників – ефективності продукту й діючих основних фондів, їхніх взаємозв'язків – дає можливість отримувати усе більш конкретні моделі науково-технічного прогресу.

По-третє, застосований у цьому дослідженні поліваріантний підхід дав змогу порівняти різні аналітичні форми моделі LSTP і змоделювати такі явища, як нерівномірність темпів НТП, ендогенні хвилі НТП, історичний тренд розвитку економічних систем та ациклічні коливання навколо нього.

По-четверте, математичний апарат, використаний у статті, – математичний аналіз, геометрія плоских кривих і звичайні диференціальні рівняння – дав змогу не тільки дослідити якісні особливості запропонованих економічних функцій та рівнянь динаміки, але й провести їх порівняльний аналіз з точки зору реалістичності, виключити неприйнятні варіанти та знайти нові.

По-п'яте, проведене дослідження поширило загальновизнаний принцип обмеженості ресурсів на їхню майбутню ефективність та можливий темп її підвищення. Це узагальнення відповідає загальнонауковій картині світу, згідно з якою будь-який макроскопічний процес не може відбуватися з нескінченною швидкістю.

Список використаної літератури / References

1. Acemoglu, D. (2009). Introduction to modern economic growth. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 990 p.
2. Aghion, P., Howitt, P. W. (2009). The economics of growth. Cambridge and London: The MIT Press, 475 p.
3. Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (2004). Economic growth, 2nd ed. Cambridge and London: The MIT Press, 654 p.
4. Baten, J., Hippe, R. (2018). Geography, land inequality and regional numeracy in Europe in historical perspective. *Journal of Economic Growth,* vol. 23, pp. 79–109.
5. Borcan, O., Olsson, O., Putterman, L. (2018). State history and economic development: evidence from six millennia. *Journal of Economic Growth,* vol. 23, pp. 1–40.
6. Bouchouicha, R., Vieider, F. M. (2019). Growth, entrepreneurship, and risk-tolerance: a risk-income paradox. *Journal of Economic Growth,* vol. 24 (3), pp. 257–282.
7. Chun, H., Ha, J., Kim, J.-W. (2014). Firm heterogeneity, R&D, and economic growth. *Economic Modelling,* vol. 36, pp. 149–156.

8. Eapen, A., Yeo, J., Sasidharan, S. (2019). Finance constraints and technology spillovers from foreign to domestic firms. *Economic Modelling*, vol. 76, pp. 50–62.
9. Gershman, B. (2014). The two sides of envy. *Journal of Economic Growth*, vol. 19 (4), pp. 407–438.
10. Handbook of Economic Growth (2005), vol. 1 A, 1st ed. Eds: Aghion, P., Durlauf, S. N., North-Holland, 1138 p.
11. Handbook of Economic Growth (2005), vol. 1 B, 1st ed. Eds: Aghion, P., Durlauf, S. N., North-Holland, 838 p.
12. Handbook of Economic Growth (2013), vol. 2 A, 1st ed. Eds: Aghion, P., Durlauf, S. N., North-Holland, 568 p.
13. Handbook of Economic Growth (2013), vol. 2 B, 1st ed. Eds: Aghion, P., Durlauf, S. N., North-Holland, 608 p.
14. Lahiri, R., Ding, J., Chinzara, Z. (2018). Technology adoption, adaptation and growth. *Economic Modelling*, vol. 70, pp. 469–483.
15. Leite, D. N., Óscar, Afonso, O., Silva, S. T. (2019). A tale of two countries: Directed technical change, trade and migratory movements. *Economic Modelling*, vol. 83, pp. 173–194.
16. Litina, A. (2016). Natural land productivity, cooperation and comparative development. *Journal of Economic Growth*, vol. 21 (4), pp. 351–408.
17. Mathonnat, C., Minea, A. (2019). Forms of democracy and economic growth volatility. *Economic Modelling*, vol. 81, pp. 594–603.
18. Özak, Ö. (2018). Distance to the pre-industrial technological frontier and economic development. *Journal of Economic Growth*, vol. 23 (2), pp. 175–221.
19. Park, H. (2020). Indeterminate equilibrium growth with product and R&D spillovers. *Economic Modelling*, vol. 86, pp. 286–298.
20. Romer, D. (2011). Advanced macroeconomics, 4th ed., University of California, Berkeley. New York: McGraw-Hill, 716 p.
21. Schaefer, A., Schiess, D., Wehrli, R. (2014). Long-term growth driven by a sequence of general purpose technologies. *Economic Modelling*, vol. 37, pp. 23–31.
22. Schenk-Hoppé, K. R., Schmalfuß, B. (2001). Random fixed points in a stochastic Solow growth model. *Journal of Mathematical Economics*, vol. 36, iss. 1, pp. 19–30.
23. Tsuboi, M. (2019). Resource scarcity, technological progress, and stochastic growth. *Economic Modelling*, vol. 81, pp. 73–88.
24. Wahl, F. (2017). Does European development have Roman roots? Evidence from the German Limes. *Journal of Economic Growth*, vol. 22 (3), pp. 313–349.

I. O. Zagoruiko

METHODOLOGY FOR MODELING MACROECONOMIC LIMITATIONS OF SCIENTIFIC AND TECHNOLOGICAL PROGRESS

Formulation of the problem. *The modern economic paradigm is the idea of unlimited prospects of science and technology in the distant future and consequently the relativity (temporality) of the limitations of production efficiency and the rate of its increase. According to the author, the hypothesis of unlimited technical development seems too optimistic. At the macrolevel, all known natural processes have certain limitations in speed and efficiency, so it is logical to assume that technological processes and product quality (as a result) are also subject to certain restrictions.*

The purpose of the article *consists in the creation of a model of limited scientific and technological progress, its verification and demonstration of its applicability.*

Research methods. *The article uses elementary implicit and complex functions, autonomous first-order differential equations. Their study was carried out using classical mathematical analysis and the geometry of plane curves. If necessary, a transition was made to a more informative coordinate system, or to the joint use of two such systems.*

The sequence of the study. *It begins with the definition of STP as an implicit function of many variables. At the first stage of the study, it is assumed that all its arguments, except for time and effectiveness, are constant. This approach has made it possible, firstly, to justify the regularity of the differential nature of the efficiency model, and secondly, to find out its form. Next, concepts such as the potential for increasing efficiency and the function of it are introduced sequentially. The next stage demonstrates the possibilities of deterministic modeling of the STP non-uniformity – infinitely repeating waves (oscillations) and acyclic exogenous fluctuations. At the third stage of the study, the concept of the sufficiency index of factors that stimulate STP and the function of this index are introduced. At the final stage, the concept of product efficiency is introduced and its relationship with the productivity of fixed assets is considered.*

Conclusions. *The study has allowed us to obtain important theoretical results.*

First, it has been shown that classical models of unlimited progress are the limiting case of one of the proposed equations. In turn, the endogenous rate of STP acts as an upper limit for its stimulation. Similarly, traditional production functions prove to be the limiting case of a production function with restrictions on maximum product efficiency and minimum efficiency of production factors. Thus, the proposed methodology implements an important general scientific principle of correspondence, according to which models describing a narrower range of processes and phenomena should be a special case of a more general model.

Secondly, the study has demonstrated heuristic capabilities of the method of transition from simple to complex. Consistent consideration of new production factors – product efficiency and operating fixed assets, their relationships – allows to obtain more and more specific models of scientific and technical progress.

Thirdly, multivariate approach used in this study has made it possible to compare different analytical forms of the LSTP model and simulate phenomena such as the non-uniformity of STP rates, STP endogenous waves, historical trend in the development of economic systems and acyclic fluctuations around it.

Fourth, mathematical methods used in this article have allowed to study qualitative features of the proposed economic functions and equations of dynamics, as well as conduct a comparative analysis of them in terms of realism, exclude unacceptable options and find new ones.

Fifth, the study has extended the universally recognized principle of limited resources to their future effectiveness and the possible rate of its increase.

Keywords: *macroeconomic modeling methodology, economic fluctuations, scientific and technological progress, waves of scientific and technological progress, production functions, production factors efficiency, efficiency potential, differential equations.*

Стаття надійшла до редакції 21.01.2020

DOI 10.24025/2306-4420.0.56.2020.201670

Загоруйко І. О., к.е.н., кафедра соціального забезпечення, Черкаський державний технологічний університет, e-mail: zagoruikovanmacro@gmail.com
ORCID 0000-0003-2819-0793
Zagoruiko I. O., Ph. D. in Economics, the department of social security, Cherkasy State Technological University